
EJERCICIOS ADICIONALES 11

a) $f(x) = \frac{(2-x)^2}{x \cos x} + 4\sqrt{x}$ b) práctica 5 – ej. 4 p) c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln(2x) - \sqrt[3]{x^2 + 4}$

Ej 11.1 a) $f(x) = \frac{(2-x)^2}{x \cos(x)} + 4\sqrt{x}$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \left[\frac{(2 - \mathbf{x})^2}{\mathbf{x} \cos(\mathbf{x})} + 4 \sqrt{\mathbf{x}} \right]' = \left[\frac{(2 - \mathbf{x})^2}{\mathbf{x} \cos(\mathbf{x})} \right]' + \left[4 \sqrt{\mathbf{x}} \right]',$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\left[(2 - \mathbf{x})^2 \right]' \cdot \mathbf{x} \cos(\mathbf{x}) - (2 - \mathbf{x})^2 \cdot [\mathbf{x} \cos(\mathbf{x})]'}{(\mathbf{x} \cos(\mathbf{x}))^2} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \mathbf{x}^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x) = \frac{2(2-x)(-1) \cdot x \cos(x) - (2-x)^2 \{ [x]' \cdot \cos(x) + x[\cos(x)]' \}}{x^2 \cos^2(x)} + 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2(2-x) \cdot x \cos(x) - (2-x)^2 (1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)))}{x^2 \cos^2(x)} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-2(2-x) \cdot x \cos(x) - (2-x)^2 (1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)))}{x^2 \cos^2(x)} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(2-x) \cdot 2x \cos(x) - (2-x)^2 (\cos(x) - x \sin(x))}{x^2 \cos^2(x)} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(2-x) \cdot 2x \cos(x)}{x^2 \cos^2(x)} - \frac{(2-x)^2 (\cos(x) - x \sin(x))}{x^2 \cos^2(x)} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(2-x) \cdot 2x \cos(x)}{x^2 \cos^2(x)} - \frac{(2-x)^2 \cos(x)}{x^2 \cos^2(x)} + \frac{(2-x)^2 x \sin(x)}{x^2 \cos^2(x)} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(2-x) \cdot 2}{x \cos(x)} - \frac{(2-x)^2}{x^2 \cos(x)} + \frac{(2-x)^2 \sin(x)}{x \cos^2(x)} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Ej 11.1 b) práctica 5 Ej 4 p

$$f(x) = \sin^2(x^3 + x)$$

$$f'(x) = [\sin^2(x^3 + x)]' = 2 \sin(x^3 + x) \cdot \cos(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)$$

$$f'(x) = 2(3x^2 + 1) \sin(x^3 + x) \cdot \cos(x^3 + x)$$

Ej 11.1 c)

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln(2x) - \sqrt[3]{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = [e^{\frac{1}{x}} \ln(2x) - \sqrt[3]{x^2 + 4}]' = [e^{\frac{1}{x}} \ln(2x)]' - [\sqrt[3]{x^2 + 4}]' \quad (*)$$

cálculo auxiliar :

$$\begin{aligned} [e^{\frac{1}{x}} \ln(2x)]' &= [e^{\frac{1}{x}}]' \cdot \ln(2x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot [\ln(2x)]' = \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \left[\frac{1}{x}\right]' \ln(2x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = e^{\frac{1}{x}} \cdot [x^{-1}]' \ln(2x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1) x^{-2} \ln(2x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1) \frac{1}{x^2} \cdot \ln(2x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \ln(2x) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \left(-\frac{\ln(2x)}{x} + 1\right) = \\ &= \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{\ln(2x)}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sqrt[3]{x^2 + 4}]' &= [(x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3} (x^2 + 4)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2x = \frac{2}{3} x (x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} x \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}} = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}} \end{aligned}$$

reemplazando en (*)

$$f'(x) = \left[e^{\frac{1}{x}} \ln(2x) \right]' - \left[\sqrt[3]{x^2 + 4} \right]'$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{\ln(2x)}{x} \right) - \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

11.2) Sea $f(x) = 5x + (4x - 1) \ln(2 - x)$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

Ej 11.2

$$f(x) = 5x + (4x - 1) \ln(2 - x)$$

hallar ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$

recordemos que la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$ es :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Calculemos $f'(x)$

$$f'(x) = [5x + (4x - 1) \ln(2 - x)]' = [5x]' + [(4x - 1) \ln(2 - x)]'$$

$$f'(x) = 5[x]' + [(4x - 1)]' \cdot \ln(2 - x) + (4x - 1) \cdot [\ln(2 - x)]'$$

$$f'(x) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot \ln(2 - x) + (4x - 1) \cdot \frac{1}{2 - x} (-1)$$

$$f'(x) = 5 + 4 \ln(2 - x) - \frac{4x - 1}{2 - x}$$

Evalúamos $f'(x)$ en $x_0 = 1$ para obtener la pendiente de la recta tangente

$$f'(1) = 5 + 4 \ln(2 - 1) - \frac{4 \cdot 1 - 1}{2 - 1} = 5 + 4 \ln(1) - \frac{3}{1} \quad \text{y como } \ln(1) = 0$$

$$f'(1) = 5 + 4 \cdot 0 - 3 = 2$$

Nos falta calcular $f(1)$ con $f(x) = 5x + (4x - 1) \ln(2 - x)$

$$f(1) = 5 \cdot 1 + (4 \cdot 1 - 1) \ln(2 - 1) = 5 + 3 \ln(1) = 5 + 3 \cdot 0 = 5$$

reemplazando en la ecuación de la recta tangente :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 5$$

$$y = 2x - 2 + 5 = 2x + 3$$

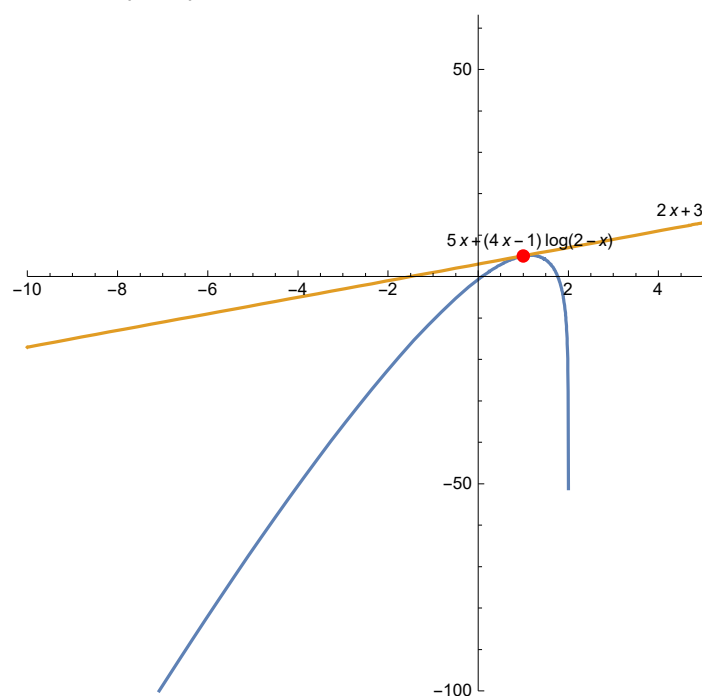
Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x_0 = 1$ es :

$$y = 2x + 3$$

Gráfico : color azul : $f(x) = 5x + (4x - 1) \ln(2 - x)$;

color naranja : $y = 2x + 3$;

punto = $(1, 5)$;



11.3) Sea $f(x) = 3x - \frac{e^{2x-6}}{x}$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Ej 11.3

$$f(x) = 3x - \frac{e^{2x-6}}{x}$$

hallar ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 3$

recordemos que la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$ es :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Calculemos $f'(x)$

$$f'(x) = \left[3x - \frac{e^{2x-6}}{x} \right]' = [3x]' - \left[\frac{e^{2x-6}}{x} \right]'$$

$$f'(x) = 3[x]' - \frac{[e^{2x-6}]' \cdot x - e^{2x-6} \cdot [x]'}{x^2}$$

$$f'(x) = 3 \cdot 1 - \frac{e^{2x-6} \cdot 2 \cdot x - e^{2x-6} \cdot 1}{x^2} = 3 - \frac{2 \cdot x \cdot e^{2x-6} - e^{2x-6}}{x^2}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{e^{2x-6}(2x - 1)}{x^2}$$

Evaluamos $f'(x)$ en $x_0 = 3$ para obtener la pendiente de la recta tangente

$$f'(3) = 3 - \frac{e^{2 \cdot 3 - 6}(2 \cdot 3 - 1)}{3^2} = 3 - \frac{e^0(5)}{9} = 3 - \frac{1 \cdot (5)}{9} = 3 - \frac{5}{9} = \frac{22}{9}$$

$$f'(3) = \frac{22}{9}$$

Nos falta calcular $f(3)$ con $f(x) = 3x - \frac{e^{2x-6}}{x}$

$$f(3) = 3 \cdot 3 - \frac{e^{2 \cdot 3 - 6}}{3} = 9 - \frac{e^0}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

reemplazando en la ecuación de la recta tangente :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3) = \frac{22}{9}(x - 3) + \frac{26}{3}$$

$$y = \frac{22}{9}x - \frac{22}{3} + \frac{26}{3} = \frac{22}{9}x + \frac{4}{3}$$

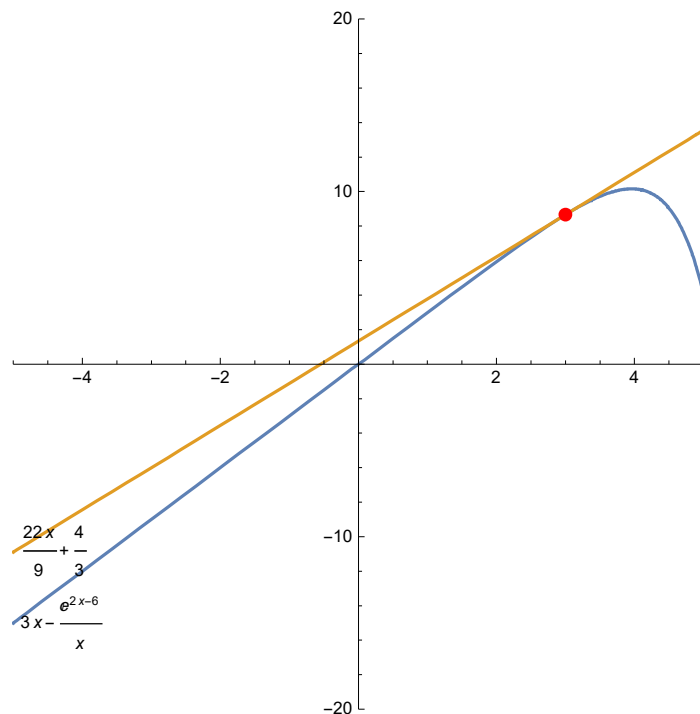
Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x_0 = 3$ es :

$$y = \frac{22}{9}x + \frac{4}{3}$$

Gráfico : color azul : $f(x) = 3x - \frac{e^{2x-6}}{x}$;

color naranja : $y = \frac{22}{9}x + \frac{4}{3}$;

punto = $\left(3, \frac{26}{3}\right)$;



11.4) Sea $f(x) = \frac{x^2}{2x+a}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que la tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0 = -3$ sea horizontal. Con el valor hallado, dar la ecuación de dicha recta.

Ej 11.4

$f(x) = \frac{x^2}{2x+a}$ hallar $a \in \mathbb{R}$ para que la tangente al gráfico de f en $x_0 = -3$

sea horizontal ($f'(-3) = 0$)

Con el a hallado dar la ecuación de la recta

Calculemos $f'(x)$

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{2x+a} \right]' = \frac{[x^2]' \cdot (2x+a) - x^2 \cdot [2x+a]'}{(2x+a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2x+a) - x^2 \cdot 2}{(2x+a)^2} = \frac{4x^2 + 2xa - 2x^2}{(2x+a)^2} = \frac{2x^2 + 2xa}{(2x+a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+a)}{(2x+a)^2}$$

Como $f'(-3) = 0$ para que la tangente sea horizontal en $x_0 = -3$

$$f'(-3) = \frac{2(-3)(-3+a)}{(2(-3)+a)^2} = \frac{-6(a-3)}{(a-6)^2} = 0 \Rightarrow -6(a-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \text{reemplazando en } f(x) = \frac{x^2}{2x+a} \text{ da } f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$$

recordemos que la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$ es :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Nos falta calcular $f(-3)$ con $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2}{2(-3)+3} = \frac{9}{-6+3} = \frac{9}{-3} = -3$$

La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(-3, -3)$ es :

$$y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3) = f'(-3)(x+3) + f(-3)$$

$$y = 0 \cdot (x+3) + (-3) = -3$$

$$y = -3$$

Gráfico : color azul : $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$;

color naranja : $y = -3$; punto = $(-3, -3)$;

