+-

Resolución de ejercicios seleccionados - Práctica 4

Repaso para Final de Mate 51 - 1 er cuatrimestre de 2020

Qué hay que saber ?

+-

Repaso Práctica 4 :

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Estudiar teoría de los pdf ' s :

funciones_exponencial _y _logaritmica.pdf

Resolver Ejercicios : 1, 2, 3, 4 a, 5 c , 5 d, 6 a, 6 b, 7, 8 y 11 a

+++

Comentarios teóricos :

Características de la función exponencial y el logaritmo

función exponencial de base a $f(x) = a^x$

Si $a > 1$ $a \in \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ es estrictamente creciente

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Imagen}(f) = \mathbb{R}_{>0}$

$a^0 = 1$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ tiene AH en la recta horizontal $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ no tiene AV

Si $a = e$ $2 < e < 3$

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e es un número irracional (tiene un desarrollo decimal infinito no periódico)

30 primeras cifras del número e

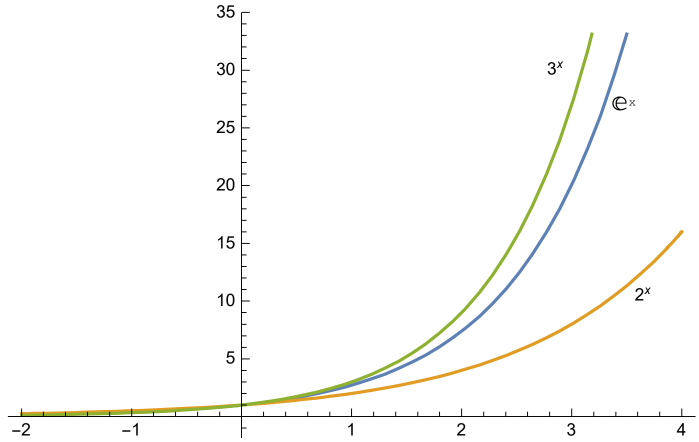
$e \simeq 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574967$

$f(x) = e^x$

Grafiquemos 2^x , e^x , 3^x

graficoExponenciales = Plot[{e^x, 2^x, 3^x}, {x, -2, 4}]

representación gráfica



Si $0 < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\text{Imagen}(f) = \mathbb{R}_{>0}$

$a^0 = 1$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ no tiene AV

$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ tiene AH en la recta horizontal $y = 0$ cuando $x \longrightarrow +\infty$

Plot$\left[\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}, \{x, -4, 2\}\right]$

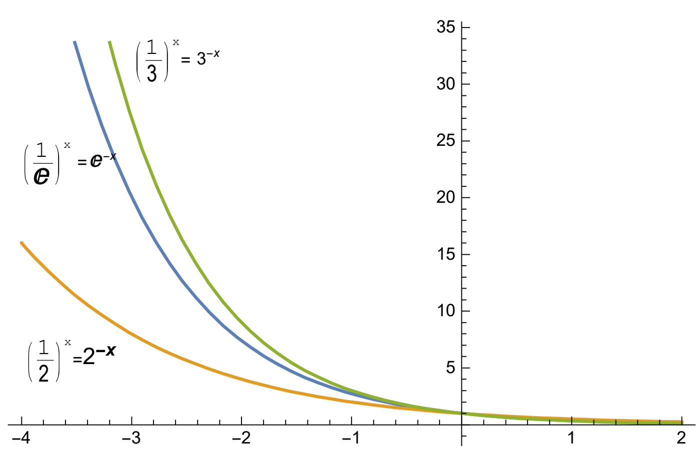
representación gráfica

Obsérvese que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$

y de acuerdo a lo que vimos con composición de funciones . cambios de escala

2^{-x} es similar al gráfico de 2^x rotado rígidamente alrededor del eje y

Idem con e^{-x} y 3^{-x}



Propiedades de la función exponencial de base $a > 0$:

suma exponentes : $a^x \cdot a^t = a^{x+t}$

resta exponentes : $\dfrac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$

exponente de exponente : $(a^x)^t = a^{x \cdot t}$

++

Función inversa de la función exponencial de base $a \in \mathbb{R}_{>0}$

La función exponencial de base $a \in \mathbb{R}_{>0}$ $f(x) = a^x$

definida como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es biyectiva y tiene inversa f^{-1}

$\left(\text{ojo } f^{-1} \text{ es la inversa de } f \text{ y no es igual a } \dfrac{1}{f} \;; \quad f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}\right)$

Su inversa se llama logaritmo en base a de x y se escribe como :

$f^{-1}(x) = \log_a(x)$

Por su definición de inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\text{Dom}(\log_a(x)) = \mathbb{R}_{>0}$

$\text{Imagen}(\log_a(x)) = \mathbb{R}$

$\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$ $\left(\text{si } (0, 1) \in \text{Graf}(f) \Longrightarrow (1, 0) \in \text{Graf}(f^{-1})\right)$

$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ tiene AV en la recta vertical $x = 0$ cuando $x \longrightarrow 0^+$

$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$ no tiene AH

Cuando la base $a = e$ el logaritmo en base e
se lo llama Logaritmo Neperiano ó Logaritmo Natural
y se lo escribe $\ln(x)$

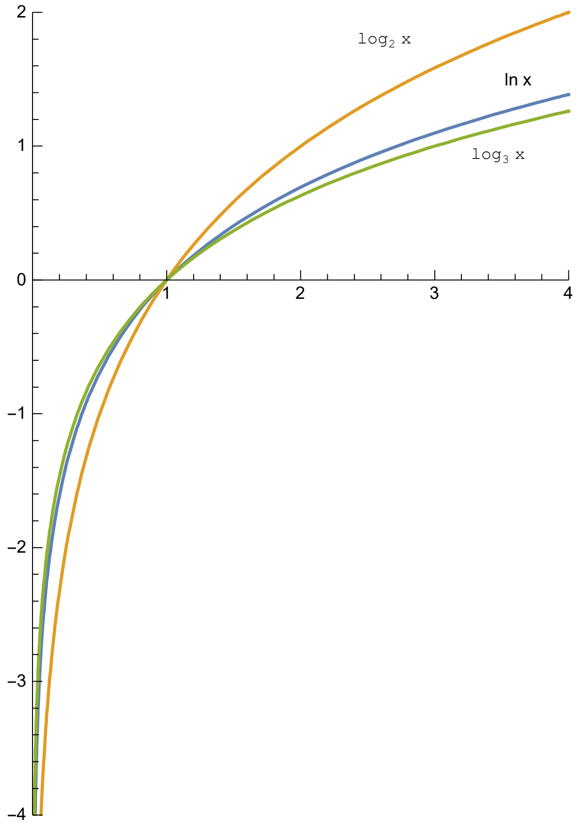
$\log_e x = \ln x$

Cuando la base $a = 10$ el logaritmo en base 10
se lo llama Logaritmo Decimal y se lo escribe $\log(x)$
decimal

$\log_{10} x = \log x$

Grafiquemos $\log_2 x$, $\log_e x = \ln x$, $\log_3 x$

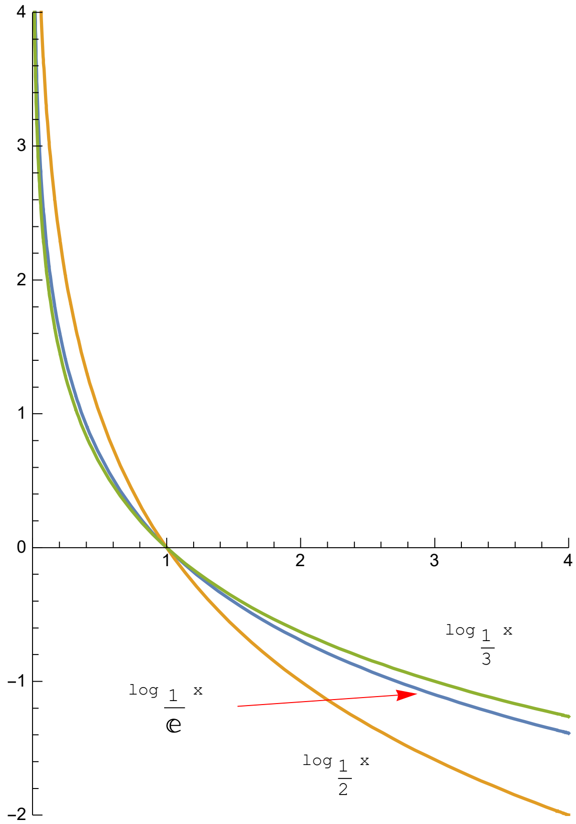
```
graficoLogaritmos = Plot[{Log[e, x], Log[2, x], Log[3, x]},
                    repre…  logaritmo   logaritmo   logaritmo
   {x, 0, 4}, PlotRange → {{0, 4}, {-4, 2}}, AspectRatio → 1.5]
              rango de representación          cociente de aspecto
```



Grafiquemos $\log_{\frac{1}{2}}(x)$, $\log_{\frac{1}{e}}(x)$, $\log_{\frac{1}{3}}(x)$

$\log_{\frac{1}{2}} x$, $\log_{\frac{1}{e}} x$, $\log_{\frac{1}{3}} x$

```
graficoLogaritmobasemenor1 = Plot[{Log[1/ⅇ, x], Log[1/2, x], Log[1/3, x]},
                              repre… logaritmo     logaritmo     logaritmo
   {x, 0, 4}, PlotRange → {{0, 4}, {-2, 4}}, AspectRatio → 1.5]
              rango de representación        cociente de aspecto
```



++

Propiedades de la función logaritmo de base a > 0 :

producto $\log_a (x \cdot t) = \log_a (x) + \log_a (t)$

división : $\log_a \left(\frac{x}{t}\right) = \log_a (x) - \log_a (t)$

exponente : $\log_a (x^t) = t \cdot \log_a (x) \qquad (t \neq 0)$

Nota : $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a (1) - \log_a (x) = 0 - \log_a (x)$

entonces $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = - \log_a (x)$

++

Propiedad de ser inversas : de la exponencial y el logaritmo en la misma base a

Si $f(x) = a^x$ **y** $f^{-1}(x) = \log_a (x)$

Veamos como se escriben la propiedades que dan la función identidad x

1) $f \circ f^{-1} (x) = x$ **y**

2) $f^{-1} \circ f (x) = x$

----

1) $f \circ f^{-1} (x) = f\left(f^{-1} (x)\right) = f(\log_a (x)) = a^{\log_a (x)} = x$

lo que hace el $\log_a (x)$ **lo deshace** a^x

es decir $a^{\log_a(x)} = x$

2) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a(a^x) = x$

lo que hace a^x **lo deshace** $\log_a(x)$

es decir $\log_a(a^x) = x$

Estas propiedades, de la composición con la inversa, se aplican así :

ejemplo 1) tenemos la siguiente ecuación para despejar x :

$\log_3(x) = \sqrt{3}$ **(entonces para deshacer lo que hace** $\log_3(x)$ **lo deshace el** 3^x**)**

aplico a ambos miembros 3^x **:**

al miembro de la izquierda $3^{\log_3(x)}$ **= por propiedad 1) = x**

al miembro de la derecha $3^{\sqrt{3}} = 3^{3^{\frac{1}{2}}}$ **= se multiplican los exponentes =** $3^{\frac{3}{2}}$

$= \sqrt{3^3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

finalmente :

$\log_3(x) = \sqrt{3} \Longrightarrow x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

----

ejemplo 2) tenemos la siguiente ecuación para despejar x :

$2^x = \frac{1}{2}$ **(entonces para deshacer lo que hace** 2^x **lo deshace el** $\log_2(x)$ **)**

aplico a ambos miembros el $\log_2$ **:**

$\log_2(2^x) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Longrightarrow$ **por propiedad 2)** $\log_2(2^x) = x$

$\Longrightarrow$ **por propiedad 2)** $\log_2(2^{-1}) = -1$

Entonces igualando la solución de $2^x = \frac{1}{2}$ **es** $x = -1$

++

Propiedad importante que vincula
la exponencial de base a con el logaritmo en base a

$\log_a(x) = t \iff a^t = x$

Ejemplo 1 :

$\log_2(8) = ?$

a que número hay que elevar la base 2 para que de 8 ? Rta : 3

$\log_2(8) = 3$ **porque por la propiedad** $2^3 = 8$

Ejemplo 2 :

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{3}\right) = t$

t es tal que $\left(\frac{1}{3}\right)^t = \sqrt{3}$

obsérvese que $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ y como $\left(\frac{1}{3}\right)^t = 3^{-t}$ entonces escribimos :

$\left(\frac{1}{3}\right)^t = \sqrt{3} \implies 3^{-t} = 3^{\frac{1}{2}}$ comparando exponentes debe ser

$$t = -\frac{1}{2}$$

++

Propiedad de cambio de base a :

para las funciones exponenciales

Todas las exponenciales de cualquier base son similares entre sí

Para la exponencial de base "a" se puede poner en función de $b^{x\cdot\alpha}$

$$a^x = b^{\log_b(a^x)} = b^{x\cdot\log_b(a)}$$

Ejemplo :

$$5^x = e^{\log_e(5^x)} = e^{\ln(5^x)} = e^{x\cdot\ln(5)} = e^{x\cdot\ln(5)}$$

----

para las funciones logarítmicas

Todas las funciones logarítmicas de cualquier base, son similares entre sí

Para la función logarítmica de base "a" se puede poner en función de $\frac{\log_b(x)}{\beta}$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Veamos como queda escrita esta propiedad cuando $b = e$

es decir queremos cambiar de base "a" a base "e"

$$\log_a(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Esta propiedad de cambio de base, es muy útil para el cálculo con una calculadora científica dado que no existe en la memoria de la calculadora los logaritmos en bases diferentes que en base "e" ó en base "10" porque no es necesario

Con las calculadoras se pueden calcular logaritmos sólo en base "e" ó en base "10" esto es ln x ó log x

Ahora, como conocemos la propiedad de cambio de base, podremos calcular el logaritmo de un número x en cualquier base "a"

Ejemplo : calcular $\log_2(25)$

aplicamos la peopiedad de cambio de base, de base "2" a base "e"

$$\log_2(25) = \frac{\ln(25)}{\ln(2)} \simeq \frac{3,2188758}{0,6931471} \simeq 4,6438561$$

Calculemos lo mismo pero cambiando a base decimal 10 :

$$\log_2(25) = \frac{\log(25)}{\log(2)} \simeq \frac{1,3979400}{0,3010299} \simeq 4,6438561$$

Un último ejemplo :

sabemos que $\log_2(16) = 4$ porque $2^4 = 16$ ok

Calculemos con la calculadora haciendo cambio a base "e" :

$$\log_2(16) = \frac{\ln(16)}{\ln(2)} \simeq \frac{2,7725887}{0,6931471} = 4$$

++

PRÁCTICA 4

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejercicio 1.- Graficar, hallar la imagen y dar la ecuación de la asíntota horizontal de f.

a. $f(x) = e^x + 2$ **b.** $f(x) = e^{x+1}$

c. $f(x) = e^{-x} - 2$ **d.** $f(x) = e^{-x+1} + 3$

Ej 1 a) $f(x) = e^x + 2$

Por lo visto con composición de funciones - cambio de escala $f(x) = e^x + 2$ se obtiene como composición a izquierda de $g(x) = e^x$ con $x + 2$

Esta composición afecta las imágenes de la exponencial $g(x)$ mediante una traslación hacia arriba en 2 lugares

Es decir que siendo Imagen $(g) = (0, +\infty)$ el conjunto imagen de f será

Imagen $(f) = (2, +\infty)$

Veamos esto analíticamente :

recordemos que para calcular el conjunto Imagen de una función poníamos $y = f(x)$ y despejábamos x como función de y mirando el "dominio" de la expresión que queda

$y = e^x + 2 \implies y - 2 = e^x \implies$ aplicando el logaritmo natural a ambos miembros :

$\ln(y-2) = \ln(e^x) =$ por propiedad de f compuesta con su inversa da $x = x$

es decir :

$\ln(y-2) = x$

(ya despejamos x como función de y, ahora miramos para cuáles valores de y está definida esta expresión)

Como el ln está definido para cuando el argumento es estrictamente positivo

deberá ser $y - 2 > 0 \implies y > 2$ (este es el cojunto Imagen de f)

Entonces Imagen (f) = $(2, +\infty)$

Veamos la AH de $f(x) = e^x + 2$

para ello calculamos el límite cuando $x \to -\infty$ de f (x) y verifiquemos que de un número

$$\lim_{x\to-\infty} e^x + 2 = 0 + 2 = 2$$

entonces la recta horizontal $y = 2$ es AH cuando $x \to -\infty$

Cuando $x \to +\infty$ no tiene AH pues $\lim_{x\to+\infty} e^x + 2 = +\infty$

--

Ej 1 b) $f(x) = e^{x+1}$

Por lo visto con composición de funciones - cambio de escala
$f(x) = e^{x+1}$ se obtiene como composición a derecha de $g(x) = e^x$ con $x + 1$

Esta composición afecta las x de la exponencial g (x)
mediante una traslación hacia la izquierda en 1 lugar

Es decir que siendo Imagen (g) = $(0, +\infty)$ el conjunto imagen de f será

Imagen (f) = $(0, +\infty)$ (las imágenes no cambian frente a esta traslación)

--

Veamos esto analíticamente :

recordemos que para calcular el conjunto Imagen de una función poníamos $y = f(x)$
y despejábamos x como función de y mirando el "dominio" de la expresión que queda

$y = e^{x+1} \implies$ para deshacer los que hace la exponencial

aplicamos el logaritmo natural a ambos miembros :

$\ln(y) = \ln(e^{x+1}) \implies \ln(y) = (x+1)\cdot\ln(e) = (x+1)\cdot 1 = x + 1$

despejando x queda :

$\ln(y) - 1 = x$

acá vemos que la cuenta se podrá hacer en la medida que $y > 0$

(sólo se puede sacar logaritmo de números estrictamente positivos)

Entonces Imagen (f) = $(0, +\infty)$

como habíamos sospechado de la traslación 1 lugar hacia la izquierda sin cambiar las imágenes de $g(x) = e^x$ $g(x+1) = e^{x+1}$

Veamos la AH de $f(x) = e^{x+1}$

para ello calculamos el límite cuando $x \to -\infty$ de $f(x)$ y verifiquemos que de un número

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x+1} = \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot e^1 = e \cdot \lim_{x\to-\infty} e^x = e \cdot 0 = 0$$

entonces la recta horizontal $y = 0$ es AH cuando $x \to -\infty$

Cuando $x \to +\infty$ no tiene AH pues $\lim_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty$

Ej 1 c) $f(x) = e^{-x} - 2$

Por lo visto con composición de funciones - cambio de escala
$f(x) = e^{-x} - 2$ se obtiene como una combinación de traslaciones y rotaciones de $g(x) = e^x$

Veamos cuál es esta combinación :

partimos de $e^x \longrightarrow$ componemos con $-x$ a derecha para que de e^{-x}

$g(x) = e^x$ y $h(x) = -x \implies g_\circ h(x) = g(h(x)) = g(-x) = e^{-x}$

esta composición genera una rotación rígida respecto al eje y
(ver tabla resumen en Comentarios teóricos de composición de funciones - cambio de escala)

Ya tenemos e^{-x}

Nos falta componer a izquierda con $m(x) = x - 2$ para "bajarla" en 2 lugares

$m_\circ(g_\circ h(x)) = m(e^{-x}) = e^{-x} - 2$

Efectivamente ésta última es una traslación en 2 hacia abajo
(se modifican las imágenes)

Resumiendo :

$e^x \longrightarrow e^{-x} \longrightarrow e^{-x} - 2$ se traduce en

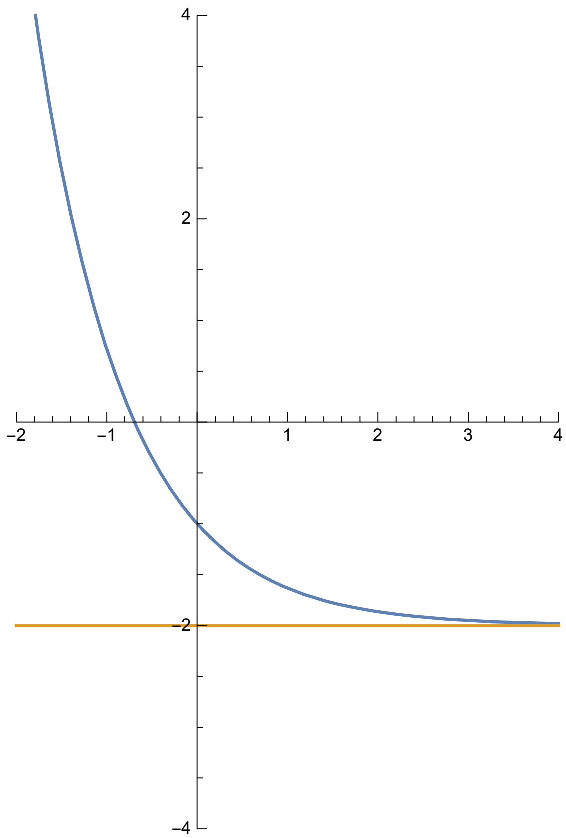
rotación rígida de e^x alrededor del eje y y luego una traslación hacia abajo en 2

Si viéramos el gráfico veríamos que las imágenes se vieron afectadas
al trasladar hacia abajo en 2

Imagen $(f) = (-2, +\infty)$

```
graficoEj1c = Plot[{e^-x - 2, -2}, {x, -2, 4}, PlotRange → {{-2, 4}, {-4, 4}}, AspectRatio → 1.5]
```

representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



Veamos esto analíticamente :

recordemos que para calcular el conjunto Imagen de una función poníamos y = f (x)
y despejábamos x como función de y mirando el "dominio" de la expresión que queda

$y = e^{-x} - 2 \quad \Longrightarrow \quad y + 2 = e^{-x}$

$\Longrightarrow$ **para deshacer los que hace la exponencial**

aplicamos el logaritmo natural a ambos miembros :

$\ln\left(y + 2\right) = \ln\left(e^{-x}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(y + 2\right) = -x \quad \Longrightarrow \quad x = -\ln\left(y + 2\right)$

ahora bien, $\ln\left(y + 2\right)$ **estará definido si el argumento es estrictamente positivo**

es decir $y + 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad y > -2$

Entonces Imagen (f) = $(-2, +\infty)$

Veamos la AH de $f(x) = e^{-x} - 2$

para ello calculamos el límite cuando $x \to +\infty$ **de** $f(x)$ **y verifiquemos que de un número**

$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = ?$

como $\lim_{x \to +\infty} -2 = -2$ **y** $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}-2\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}} - \lim_{x\to+\infty} 2 = 0-2=-2$$

entonces la recta horizontal $y = -2$ es AH cuando $x \to +\infty$

Cuando $x \to -\infty$ no tiene AH pues $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} - 2 = +\infty$

Ej 1 d) $\quad f(x) = e^{-x+1} + 3$

Por lo visto con composición de funciones - cambio de escala

$f(x) = e^{-x+1} + 3$ se obtiene como una combinación de traslaciones y rotaciones de $g(x) = e^{x}$

Veamos cuál es esta combinación :

primero conviene sacar factor común (-1) en el exponente así :

$e^{-x+1} + 3 = e^{-(x-1)} + 3$

partimos de $e^{x} \longrightarrow$ componemos con $-x$ a derecha para que de e^{-x}

$g(x) = e^{x}$ **y** $h(x) = -x \quad \Longrightarrow \quad$ **definimos** $m(x) = g_{\circ} h(x) = g(h(x)) = g(-x) = e^{-x}$

esta 1 er composición genera una rotación rígida respecto al eje y de e^{x}

luego componemos a derecha con $s(x) = x - 1$

esta 2 da composición genera una traslación en 1 lugar en las x hacia la derecha

$m_{\circ} s(x) = m\left(x-1\right) = e^{-(x-1)}$

llamemos $t(x) = m_{\circ} s(x) = e^{-(x-1)}$

Nos falta componer t a izquierda con $q(x) = x + 3$ para trasladar en 3 lugares hacia arriba

Entonces $q_{\circ} t(x) = q(t(x)) = t(x) + 3 = e^{-(x-1)} + 3$

Esta 3 era composición genera una traslación verticalmente en 3 lugares hacia arriba

$m_{\circ}(g_{\circ} f(x)) = m(e^{-x}) = e^{-x} - 2$

Efectivamente ésta última es una traslación en 2 hacia abajo
(se modifican las imágenes)

Resumiendo :

$e^{x} \longrightarrow e^{-x} \longrightarrow e^{-(x-1)} \longrightarrow e^{-(x-1)} + 3$ **se traduce en**

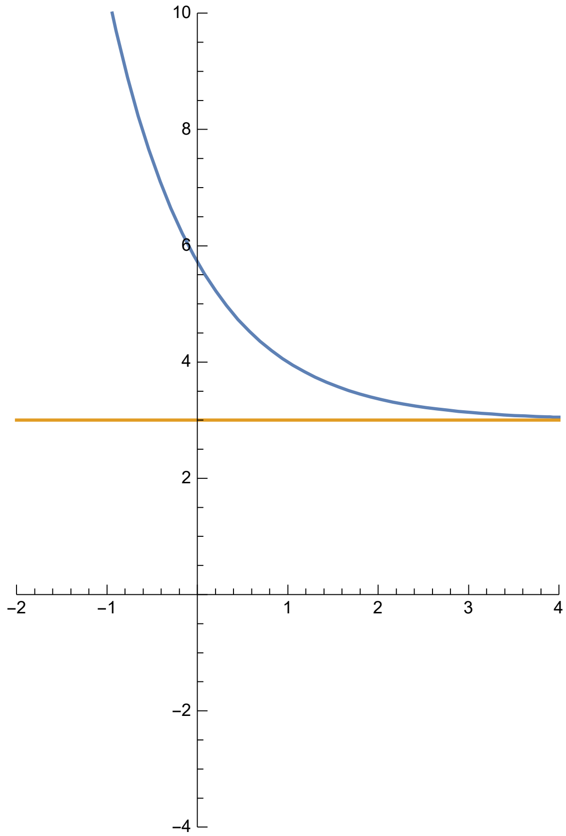
rotación rígida de e^{x} alrededor del eje y , luego una traslación hacia la derecha en 1

y finalmente a esta una traslación vertical hacia arriba en 3

Si viéramos el gráfico veríamos que las imágenes se vieron afectadas
al trasladar hacia arriba en 3

Imagen $(f) = (3, +\infty)$

```
graficoEj1c = Plot[{e^(-x+1) + 3 , 3}, {x, -2, 4}, PlotRange → {{-2, 4}, {-4, 10}}, AspectRatio → 1.5]
```
representación gráfica · rango de representación · cociente de aspecto



Veamos el conjunto Imagen analíticamente :

recordemos que para calcular el conjunto Imagen de una función poníamos $y = f(x)$
y despejábamos x como función de y mirando el "dominio" de la expresión que queda

$y = e^{-x+1} + 3 \quad \Longrightarrow \quad y - 3 = e^{-x+1}$

$\Longrightarrow$ **para deshacer los que hace la exponencial**

aplicamos el logaritmo natural a ambos miembros :

$\ln(y-3) = \ln(e^{-x+1}) \quad \Longrightarrow \quad \ln(y-3) = -x+1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 - \ln(y-3)$

ahora bien, $\ln(y-3)$ estará definido si el argumento es estrictamente positivo

es decir $y - 3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad y > 3$

Entonces Imagen $(f) = (3, +\infty)$

Veamos la AH de $f(x) = e^{-x+1} + 3$

para ello calculamos el límite cuando $x \to +\infty$ de $f(x)$ y verifiquemos que de un número

$\lim_{x\to+\infty} (e^{-x+1} + 3) = ?$

como $\lim_{x\to+\infty} 3 = 3$ **y** $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} \cdot e^1 = 0$

Entonces

$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x+1}+3\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x+1} + \lim_{x\to+\infty} 3 = 0+3 = 3$

entonces la recta horizontal $y = 3$ es AH cuando $x \to +\infty$

Cuando $x \to -\infty$ no tiene AH pues $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1}+3 = +\infty$

++

Ejercicio 2.- Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Dar, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal.

a. $f(x)=e^{-x^2}$ **b.** $f(x)=e^{-2x}$

c. $f(x)=e^{x+2}-3$ **d.** $f(x)=e^{x^2+5}$

Ej 2 a) Sea $f(x) = e^{-x^2}$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}$ y $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$

entonces la recta horizontal $y = 0$ es AH de $f(x)$ para cuando $x \to +\infty$

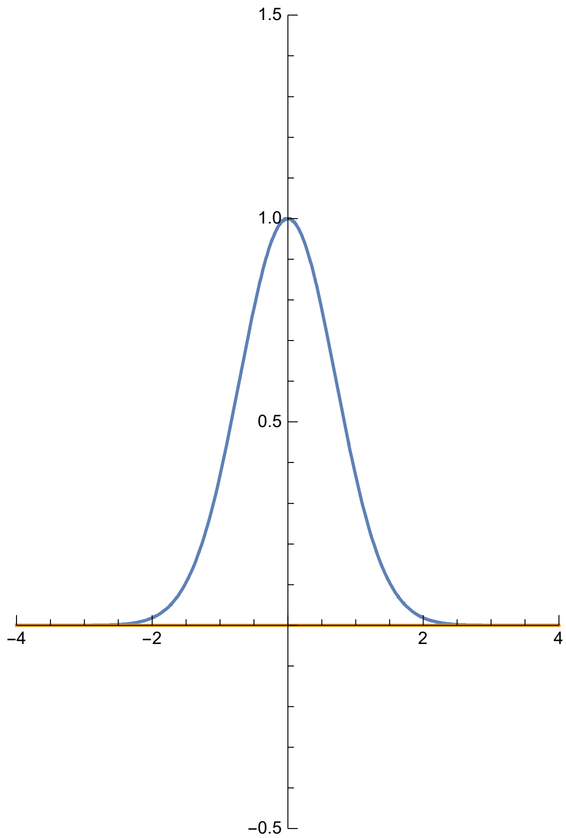
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$ (dado que $x^2 > 0$ cuando $x \to -\infty$)

entonces la recta horizontal $y = 0$ es AH de $f(x)$ para cuando $x \to -\infty$

----

está buena esta función. Vean el gráfico de una campana de Gauss

graficoEj2a = Plot$\left[\left\{e^{-x^2}, 0\right\}, \{x, -4, 4\}, \text{PlotRange} \to \{\{-4, 4\}, \{-0.5, 1.5\}\}, \text{AspectRatio} \to 1.5\right]$
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



Ej 2 b) Sea $f(x) = e^{-2x}$

Calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x}$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

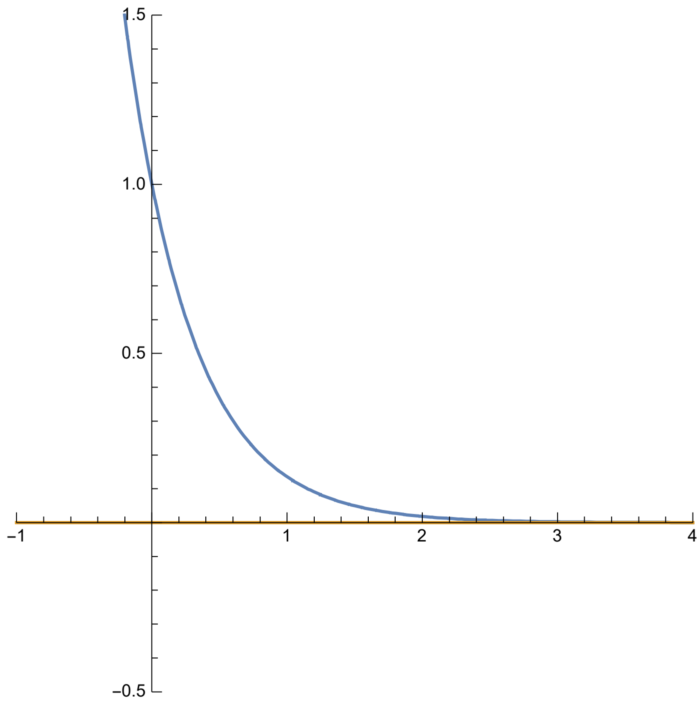
entonces la recta horizontal $y = 0$ es AH de $f(x)$ para cuando $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ (dado que $-2x > 0$ cuando $x \to -\infty$)

entonces $f(x)$ no tiene AH para cuando $x \to -\infty$

Vean el gráfico de una exponencial decreciente

```
graficoEj2a = Plot[{e^(-2 x), 0}, {x, -1, 4}, PlotRange → {{-1, 4}, {-0.5, 1.5}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



Ej 2 c) Sea $f(x) = e^{-x+2} - 3$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} - 3$ y $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2} - 3$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} - 3 = ?$

cálculo auxiliar :

como $\lim_{x\to+\infty} -3 = -\lim_{x\to-\infty} 3 = -3$ y

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} \cdot e^2 = e^2 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = e^2 \cdot 0 = 0$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} - 3 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} - \lim_{x\to+\infty} 3 = e^2 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} - 3 = e^2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3 = -3$$

entonces la recta horizontal $y = -3$ es AH de $f(x)$ para cuando $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2} - 3 = ?$

cálculo auxiliar :

como $\lim_{x\to-\infty} -3 = -\lim_{x\to-\infty} 3 = -3$ y

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \cdot e^2 = e^2 \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = e^2 \cdot +\infty = +\infty \quad (-x \geq \text{ cuando } x \to -\infty)$$

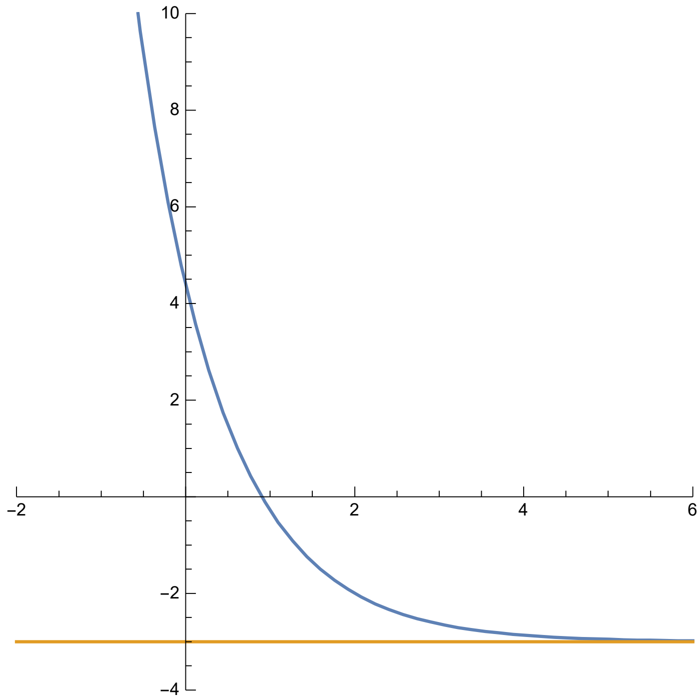
Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} - 3 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} - \lim_{x\to+\infty} 3 = e^2 \cdot \lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 3 = e^2 \cdot +\infty - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

entonces f (x) no tiene AH para cuando $x \to -\infty$

Vean el gráfico de una exponencial decreciente

graficoEj2c = Plot[{e^{-x+2} - 3, -3}, {x, -2, 6}, PlotRange → {{-2, 6}, {-4, 10}}, AspectRatio → 1]
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



Este gráfico es el resultado de los siguientes cambios de escala :

como $e^{-x+2} - 3 = e^{-(x-2)} - 3$

partimos de $e^{x} \longrightarrow e^{-x} \longrightarrow e^{-(x-2)} \longrightarrow e^{-(x-2)} - 3$

.- 1 era composición a derecha $g(x) = e^{x}$ con $h(x) = -x \Longrightarrow g_{\circ} h(x) = g(-x) = e^{-x}$

esta es una rotación rígida de e^{x} alrededor del eje y

llamemos $m(x) = g_{\circ} h(x) = e^{-x}$ es decir $m(x) = e^{-x}$

.- 2 da composición a derecha entre $m(x)$ y $t(x) = x - 2 \Longrightarrow m_{\circ} t(x) = m(x-2) = e^{-(x-2)}$

esta es una traslación 2 lugares para la derecha sobre las x

llamemos $s(x) = e^{-(x-2)}$

.- 3 era composición a izquierda entre $s(x) = e^{-(x-2)}$ y $q(t) = x - 3$

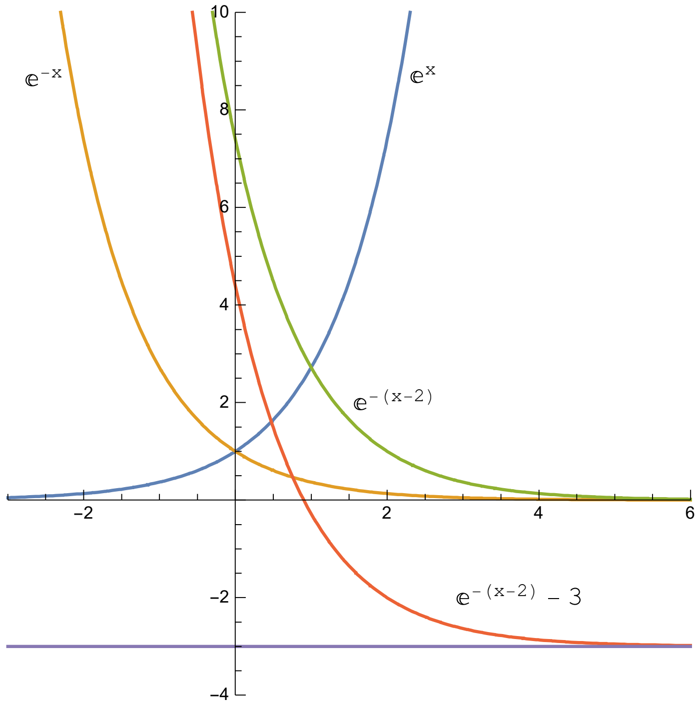
$\Longrightarrow q_{\circ} s(x) = q\left(e^{-(x-2)}\right) = e^{-(x-2)} - 3$

esta es una traslación 3 lugares verticalmente sobre las y en 3 lugares para abajo

Veamos gráficamente esta combinación de composiciones

graficoEj2c_corrimientos = Plot[{e^{x}, e^{-x}, $e^{-(x-2)}$, $e^{-(x-2)}$ - 3, -3},
representación gráfica

{x, -3, 6}, PlotRange → {{-3, 6}, {-4, 10}}, AspectRatio → 1]
rango de representación | cociente de aspecto



Ej 2 d) Sea $f(x) = e^{-x^2+5}$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+5}$ y $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+5}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+5} = ?$

cálculo auxiliar :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} \cdot e^5 = e^5 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = e^5 \cdot 0 = 0$$

Entonces

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+5} = 0$

entonces la recta horizontal $y = 0$ es AH de $f(x)$ para cuando $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+5} = ?$

cálculo auxiliar :

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot e^5 = e^5 \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = e^5 \cdot 0 = 0$$

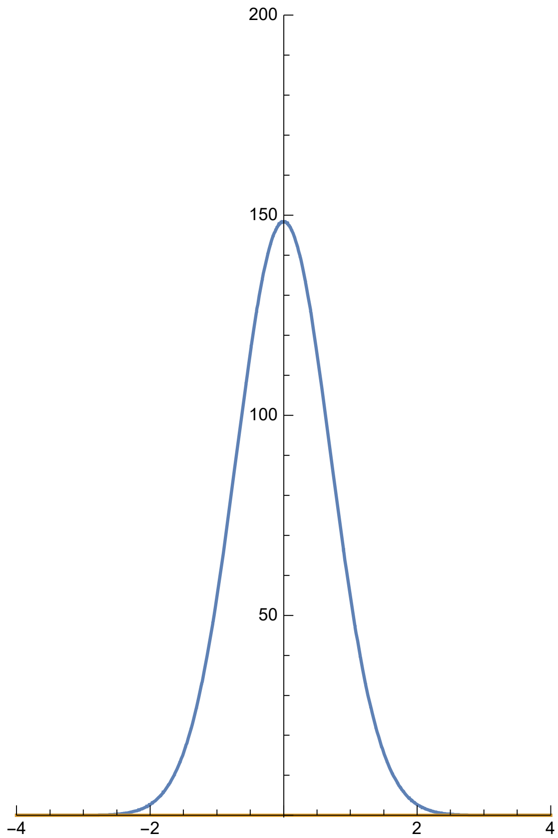
Entonces

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+5} = 0$

entonces la recta horizontal $y = 0$ es AH de $f(x)$ para cuando $x \to -\infty$

Es una campanita de Gauss dilatada por factor e^5 según las y $\left(e^{-x^2+5} = e^5 \cdot e^{-x^2}\right)$

graficoEj2d = Plot[{e^{-x^2+5}, 0}, {x, -4, 4}, PlotRange → {{-4, 4}, {-0.5, 200}}, AspectRatio → 1.5]
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



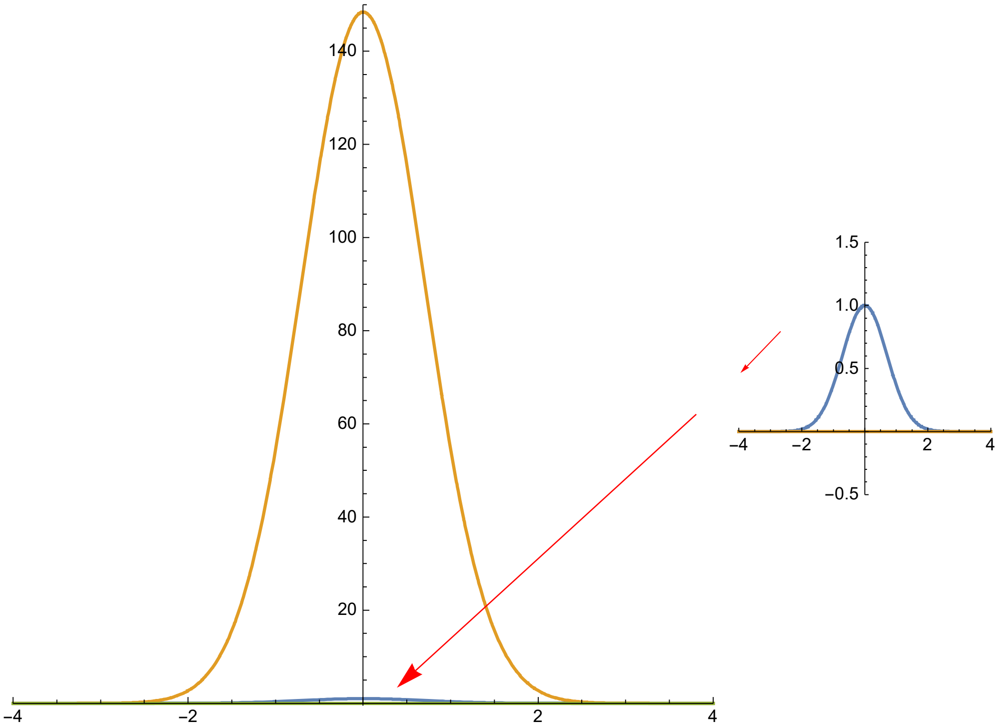
--

Grafiquemos conjuntamente e^{-x^2} y e^{-x^2+5} para que vean el efecto

graficoEj2d =
Plot[{e^{-x^2}, e^{-x^2+5}, 0}, {x, -4, 4}, PlotRange → {{-4, 4}, {-0.5, 150}}, AspectRatio → 1]
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

N[e^5, 6]
valor numérico

148.413



++

Ejercicio 3.- Resolver.

a. $e^{2x-1}=8$ **b.** $3e^{2-x}=1$

c. $\ln(2x-3)=0$ **d.** $\ln(5x-1)=2$

En este ejercicio 3 hay que usar propiedades de las funciones exponencial y logaritmo. Básense en los comentarios teóricos 2 en páginas 14 y 15 y páginas 16 y 17 de este documentoPDF

Ej 3 a) encontrar x tal que

$e^{2x-1} = 8 \quad \Longrightarrow$ **aplicamos ln en ambos miembros**

$\ln\left(e^{2x-1}\right) = \ln(8)$

por propiedad de composicion f exponencial e^x **con su inversa el** $\ln(x)$

$2x-1 = \ln(8) \quad \Longrightarrow \quad 2x = \ln(8)+1 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{\ln(8)+1}{2}$

como $8 = 2^3$ **podemos calcular** $\ln(8) = \ln\left(2^3\right) = 3\cdot\ln(2)$
(propiedad de logaritmo exponente página 17)

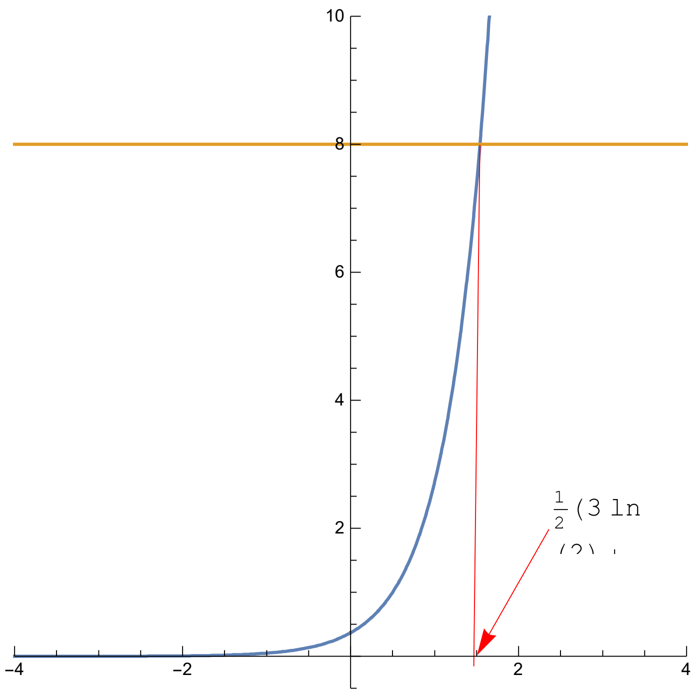
Entonces $x = \dfrac{3\ln(2)+1}{2}$

$S = \left\{\dfrac{3\ln(2)+1}{2}\right\}$

Gráficamente encontrar los x tal que $e^{2x-1} = 8$ es buscar el x de la intersección entre e^{2x-1} y la recta horizontal y = 8

graficoEj3a = Plot$\left[\left\{e^{2x-1}, 8\right\}, \{x, -4, 4\}, \text{PlotRange} \to \{\{-4, 4\}, \{-0.5, 10\}\}, \text{AspectRatio} \to 1\right]$

representación gráfica — rango de representación — cociente de aspecto



Ej 3 b) encontrar x tal que

$$3\,e^{2-x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{2-x} = \frac{1}{3}$$

aplicamos ln en ambos miembros

$$\ln\left(e^{2-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

por propiedad de composicion f exponencial e^x con su inversa el ln (x)

$$2 - x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \Longrightarrow \quad -x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - [\ln(1) - \ln(3)]$$

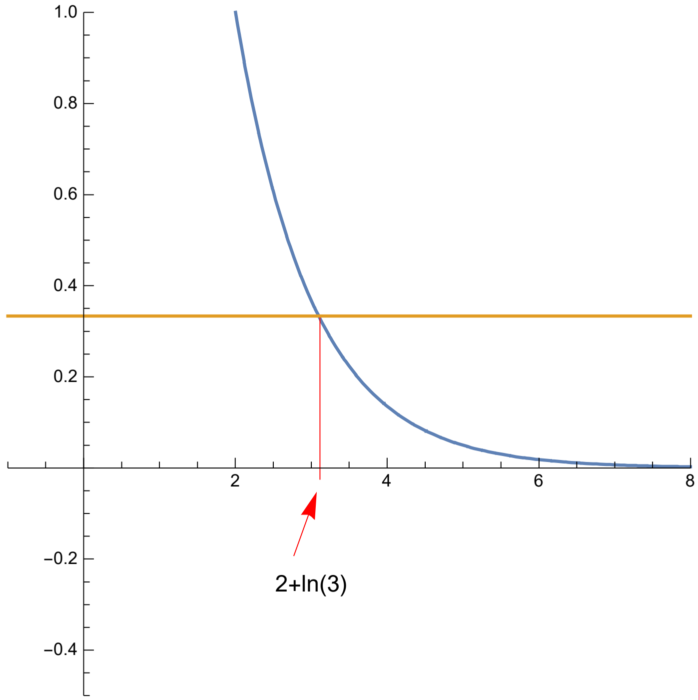
$$\Longrightarrow \quad x = 2 - [0 - \ln(3)] = 2 + \ln(3)$$

Entonces $x = 2 + \ln(3)$

$S = \{2 + \ln(3)\}$

graficoEj3b = Plot$\left[\left\{e^{2-x}, \frac{1}{3}\right\}, \{x, -1, 8\}, \text{PlotRange} \to \{\{-1, 8\}, \{-0.5, 1\}\}, \text{AspectRatio} \to 1\right]$

representación gráfica — rango de representación — cociente de aspecto



Ej 3 c) encontrar x tal que

$\ln(2x-3) = 0$

aplicamos la exponencial e^x en ambos miembros

$e^{\ln(2x-3)} = e^0$

por propiedad de composicion f exponencial e^x con su inversa el $\ln(x)$

y como $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$

$2x-3 = 1 \implies 2x = 1+3 \implies x = \frac{4}{2} = 2$

$\implies x = 2$

Entonces $x = 2$

$S = \{2\}$

Otra forma :

También podríamos haber pensado cuando la función logaritmo es 0

Es decir cuáles son los ceros del logaritmo

recordemos que $\log_a x = 0 \implies x = 1$

si base $a = e \quad \log_a x = \ln(x)$

en particular $\ln(2x-3) = 0 \implies 2x-3 = 1 \implies 2x = 4 \implies x = 2$

$S = \{2\}$

Ej 3 d) encontrar x tal que

$\ln(5x-1) = 2$

aplicamos la exponencial e^x en ambos miembros

$e^{\ln(5x-1)} = e^2$

por propiedad de composicion f exponencial e^x con su inversa el ln (x)

$5x - 1 = e^2 \implies 5x = e^2 + 1 \implies x = \dfrac{1+e^2}{5}$

Entonces $x = \dfrac{1+e^2}{5}$

$S = \left\{\dfrac{1+e^2}{5}\right\}$

++

Ejercicio 4.- Hallar el dominio y los ceros de f.

a. $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x-8}{3x}\right)$ **b.** $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$

Ej 4 a) Busquemos Dominio y C^0

Sea $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x-8}{3x}\right)$

Recordemos que los logaritmos están definidos estrictamente para los números reales positivos

es decir $\mathrm{Dom}(\log_a x) = \mathbb{R}_{>0}$

con esto en mente y para f (x) deberá suceder que :

$\dfrac{5x-8}{3x} > 0$ $\left(\text{esto es del tipo } \dfrac{A}{B} > 0 \implies A > 0 \text{ y } B > 0 \text{ ó } A < 0 \text{ y } B < 0\right)$

el cociente será positivo si los dos factores numerador y denominador tienen el mismo signo

planteemos esto :

$[\ \text{caso1)}\ \ 5x - 8 > 0 \ \text{ y } \ 3x > 0 \quad \text{ó} \quad \text{caso 2)}\ \ 5x - 8 < 0 \ \text{ y } \ 3x < 0\ ]$

$[\ \ 5x > 8 \ \text{ y } \ x > \dfrac{0}{3} \quad \text{ó} \quad 5x < 8 \ \text{ y } \ x < \dfrac{0}{3}\ ]$

$[\ \ x > \dfrac{8}{5} \ \text{ y } \ x > 0 \quad \text{ó} \quad x < \dfrac{8}{5} \ \text{ y } \ x < 0\ ]$

$S_1 = \left(\dfrac{8}{5}, +\infty\right) \quad \cup \quad S_2 = (-\infty, 0)$

$S = S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1 = (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{8}{5}, +\infty\right)$

Entonces $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{8}{5}, +\infty\right)$

Calculemos el conjunto de ceros C^0 (f)

recordando que los ceros del logaritmo se dan cuando el argumento es igual a 1

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) \;/\; f(x) = 0\}$

$$\ln\left(\frac{5x-8}{3x}\right) = 0$$

(o aplicamos la exponencial a ambos miembros o directamente panteamos que el argumento sea igual a 1, da lo mismo)

$$e^{\ln\left(\frac{5x-8}{3x}\right)} = e^0 \implies$$

$$\implies \frac{5x-8}{3x} = 1 \implies 5x-8 = 1\cdot 3x \implies 5x-3x = 8 \implies 2x = 8 \implies x = 4$$

$$\implies \quad x = 4$$

verifiquemos que está bien :

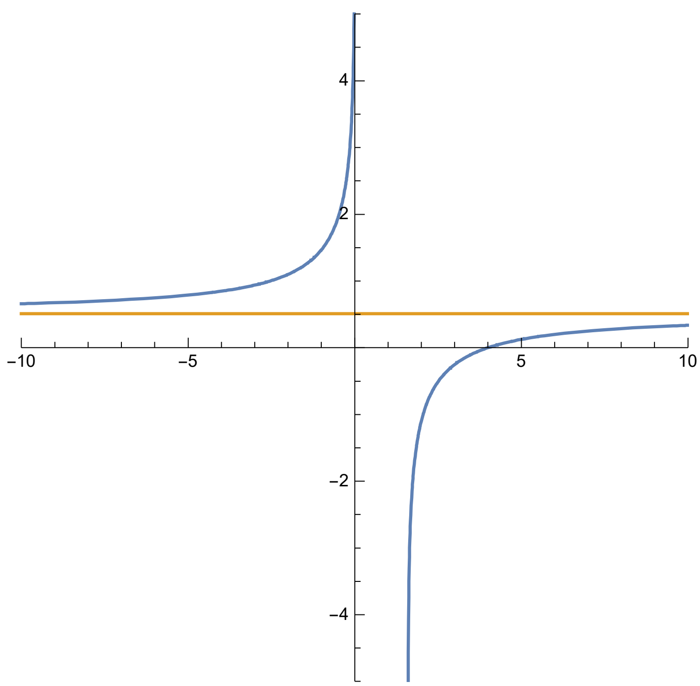
$$\frac{5\cdot 4-8}{3\cdot 4} = \frac{20-8}{12} = \frac{12}{12} = 1 \quad \text{y como} \quad \ln(1) = 0 \quad \text{está ok!}$$

Entonces $C^0 = \{4\}$

Veamos el gráfico porque es muy loca esta f (x) que surge de la composición del logaritmo con una hipérbola o función homográfica

$\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$

```
graficoEj4a =
 Plot[{Log[(5 x - 8)/(3 x)], Log[5/3]}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-5, 5}}, AspectRatio → 1]
```
repre··· logaritmo logaritmo rango de representación cociente de aspecto



Se ve que en el intervalo $\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$

f (x) no está definida porque no se puede calcular el log de números negativos

y que las rectas verticales $x = 0$ **y** $x = \frac{8}{5}$ **son AV de f (x)**

y que la recta horizontal $y = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ **es AH de f (x)**

Ejercicio 5.- Hallar la función inversa f^{-1}. Dar su dominio y su imagen.

a. $f(x) = e^{2x+1}$ **b.** $f(x) = \ln(3-x)$

c. $f(x) = 2e^{4-5x} + 3$ **d.** $f(x) = 1 + \ln(2x+3)$

Ej 5 c) $f(x) = 2\,e^{4-5x} + 3$

Vemos que

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\text{Imagen}(f) = \mathbb{R}_{>3} = (3,\ +\infty)$

f definida como $f : \mathbb{R} \longrightarrow (3,\ +\infty)$ **es biyectiva y tiene inversa** f^{-1}

Calculemos f^{-1}

ponemos $y = 2\,e^{4-5x} + 3$

despejamos x

$y - 3 = 2\,e^{4-5x} \quad \Longrightarrow$

$\frac{y-3}{2} = e^{4-5x}$

aplicamos ln en ambos miembros

$$\ln\left(\frac{y-3}{2}\right) = \ln\left(e^{4-5x}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{y-3}{2}\right) = 4 - 5x \quad \Longrightarrow \quad 5x = 4 - \ln\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\ln\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

por lo tanto , intercambiando $x \longleftrightarrow y$

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

vemos en esta expresión que estará definida si $\frac{x-3}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 3 > 0$

$\Longrightarrow \quad x > 3$

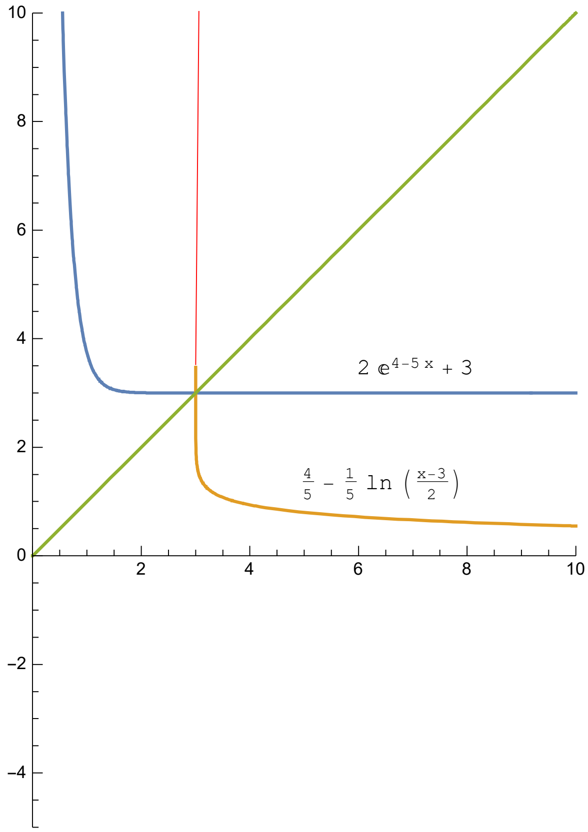
Entonces $\text{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}_{>3} = (3,\ +\infty)$ **y** $\text{Imagen}\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R} = \text{Dom}(f)$

Grafiquemos para vean la forma funcional de f y f^{-1}

y su simetría respecto a la función identidad y = x

$f\ (x) = 2\, e^{4-5x} + 3 \qquad f^{-1}\ (x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$

```
graficoEj5c = Plot[{2 ⅇ^(4-5 x) + 3, 4/5 - 1/5 Log[(x - 3)/2], x},
               representación gráfica       logaritmo
   {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {-5, 10}}, AspectRatio → 1.5]
               rango de representación          cociente de aspecto
```



Ej 5 d) $\quad f\ (x) = 1 + \ln\,(2x + 3)$

Vemos que

como el logaritmo está definido para argumentos estrictamente positivos

deberá ser

$2x + 3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x > -3 \quad \Longrightarrow \quad x > -\frac{3}{2}$

$\text{Dom}\ (f) = \left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$

$\text{Imagen}\ (f) = \mathbb{R}$

f definida como $f : \left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ **es biyectiva y tiene inversa** f^{-1}

Calculemos f^{-1}

ponemos $y = 1 + \ln(2x + 3)$

despejamos x

$y - 1 = \ln(2x + 3)$

aplicamos e^x **en ambos miembros**

$\Longrightarrow \quad e^{y-1} = e^{\ln(2x+3)}$

$\Longrightarrow \quad e^{y-1} = 2x + 3 \quad \Longrightarrow \quad e^{y-1} - 3 = 2x \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{e^{y-1} - 3}{2}$

por lo tanto , intercambiando $x \leftrightarrow y$

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{x-1} - 3}{2}$$

vemos en esta expresión que estará definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$

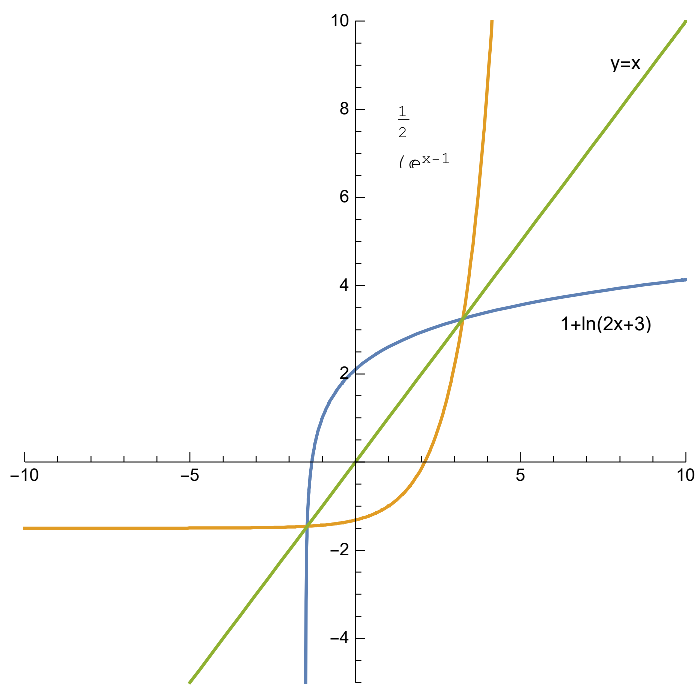
Entonces $\text{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}$ **y** $\text{Imagen}\left(f^{-1}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right) = \text{Dom}(f)$

Grafiquemos para vean la forma funcional de f **y** f^{-1}
y su simetría respecto a la función identidad $y = x$

$f(x) = 1 + \ln(2x + 3) \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{e^{x-1} - 3}{2}$

```
graficoEj5d = Plot[{1 + Log[2 x + 3], (e^(x-1) - 3)/2, x},
  {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-5, 10}}, AspectRatio → 1]
```

representa·· logaritmo rango de representación cociente de aspecto



Ejercicio 6.- Hallar el dominio, las ecuaciones de las asíntotas verticales, los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

a. $f(x)=\ln(x-3)$ **b.** $f(x)=\ln(x^2-4)$

c. $f(x)=1-\ln(2x-3)$ **d.** $f(x)=\ln\left(\frac{1}{2}x^2-3x+5\right)$

Ej 6 a) Hallar Dom (f), AV, C^0, C^+, C^-

$f(x) = \ln(x - 3)$

Para calcular el dominio de f vemos que el logaritmo está definido

si su argumento es estrictamente positivo, es decir:

$x - 3 > 0 \implies x > 3$

Entonces Dom (f) = $(3, +\infty)$

Existencia de AV

Sabemos del ln (x) que tiene una única AV en x = 0 por la derecha

En el caso de $\ln(x - 3)$ y como está corrida en 3 lugares para la derecha sospechamos que tendrá una AV en x = 3 por la derecha

Para ver esto calculemos el limite lateral cuando $x \to 3^+$

$$\lim_{x\to 3^+} \ln(x-3) = \lim_{x\to 3^+} \ln(0^+) = -\infty$$

Entonces la recta vertical x = 3 es AV de ln (x - 3) para $x \to 3^+$ por derecha

----

Calculo de C^0

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) \ / \ f(x) = 0\}$

Planteamos f (x) = 0

$\ln(x - 3) = 0 \implies x - 3 = 1 \implies x = 4$

$C^0 = \{4\}$

Calculo de C^+

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) \ / \ f(x) > 0\}$

Planteamos f (x) > 0

$\ln(x - 3) > 0$ **apliquemos la exponencial e^x en ambos miembros**

$e^{\ln(x-3)} > e^0 \implies x - 3 > 1 \implies x > 4$

$C^+ = (4, +\infty)$

Calculo de C^-

$C^- = \{x \in Dom(f) \ / \ f(x) < 0\}$

Planteamos $f(x) < 0$

$\ln(x-3) < 0$ **apliquemos la exponencial e^x en ambos miembros**

$e^{\ln(x-3)} < e^0 \implies x - 3 < 1 \implies x < 4$

Pero ojo acá hay que tener en cuenta que el Dom (f) = $(3, +\infty)$

Entonces los x que pertenecen al dominio y además son menores que 4 son los que están entre $(3, 4)$ (es la intersección de $(3, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (3, 4)$)

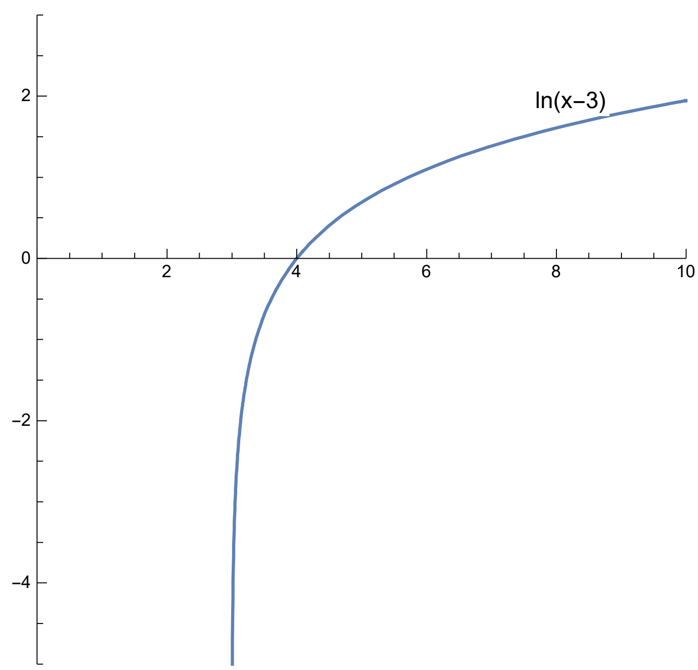
$C^- = (3, 4)$

Veamos el gráfico de f (x)

$\ln(x-3)$

```
graficoEj6a = Plot[Log[x - 3], {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {-5, 3}}, AspectRatio → 1]
```

repr··· logaritmo rango de representación cociente de aspecto



Ej 6 b) Hallar Dom (f), AV, C^0, C^+, C^-

$f(x) = \ln(x^2 - 4)$

Para calcular el dominio de f vemos que el logaritmo está definido

si su argumento es estrictamente positivo, es decir :

$$x^2 - 4 > 0 \implies x^2 > 4 \implies \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \implies |x| > 2$$

entonces o bien :

$x > 2$ ó $x < -2$

Entonces Dom (f) = $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

observemos que $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ no está definida en $[-2, 2]$

Existencia de AV

AV1

Sabemos del $\ln(x)$ que tiene una única AV en $x = 0$ por la derecha

En el caso de $\ln(x^2 - 4)$
sospechamos que tendrá AV donde $x^2 - 4 = 0$ o sea en $x = 2$ ó en $x = -2$

Para ver esto calculemos el limite lateral cuando $x \to -2^-$

(hemos tenido en cuenta el Dom (f) porque para -2^+ no está definida)

$$\lim_{x\to -2^-} \ln(x^2 - 4) = \lim_{x\to -2^-} \ln(4^+ - 4) = \lim_{x\to -2^-} \ln(0^+) = -\infty$$

Entonces la recta vertical $x = -2$ es AV de $f(x)$ para $x \to -2^-$ por izquierda

----

AV2

Veamos ahora el límite lateral caundo $x \to 2^+$

$$\lim_{x\to 2^+} \ln(x^2 - 4) = \lim_{x\to 2^+} \ln(4^+ - 4) = \lim_{x\to 2^+} \ln(0^+) = -\infty$$

Entonces la recta vertical $x = 2$ es AV de $f(x)$ para $x \to 2^+$ por derecha

----

Calculo de C^0

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) \ / \ f(x) = 0\}$

Planteamos $f(x) = 0$

$$\ln(x^2 - 4) = 0 \implies x^2 - 4 = 1 \implies x^2 = 5 \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{5} \implies |x| = \sqrt{5}$$

entonces $x = \sqrt{5}$ ó $x = -\sqrt{5}$

$$C^0 = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$$

Calculo de C^+

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) \ / \ f(x) > 0\}$

Planteamos $f(x) > 0$

$\ln(x^2 - 4) > 0$ apliquemos la exponencial e^x en ambos miembros

$$e^{\ln(x^2-4)} > e^0 \implies x^2 - 4 > 1 \implies x^2 > 5 \implies \sqrt{x^2} > \sqrt{5} \implies |x| > \sqrt{5}$$

entonces $x > \sqrt{5}$ ó $x < -\sqrt{5}$

$$C^+ = \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$$

Obsérvese que $C^+ \subset \text{Dom}(f)$ así que todo bien ($\subset$ significa incluido)

Calculo de C^-

$C^- = \{x \in \text{Dom}(f) \ / \ f(x) < 0\}$

Planteamos $f(x) < 0$

$\ln\left(x^2 - 4\right) < 0$ **apliquemos la exponencial e^x en ambos miembros**

$e^{\ln\left(x^2-4\right)} < e^0 \implies x^2 - 4 < 1 \implies x^2 < 5 \implies \sqrt{x^2} < \sqrt{5} \implies |x| < \sqrt{5}$

es decir $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ **o sea** $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

Pero ojo acá hay que tener en cuenta que el Dom (f) $= (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Entonces los x que pertenecen al dominio y además pertenecen al intervalo $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$ **son los que están en la intersección de**

$[(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)] \cap \left[\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) = (3, 4)\right]$

$-\infty \qquad -\sqrt{5} \qquad -2 \qquad\qquad 2 \qquad \sqrt{5} \qquad +\infty$

// // / (ϕϕϕϕϕϕϕϕ) 00 000 000 (ϕϕϕϕϕϕϕϕ) // // // // // // // /

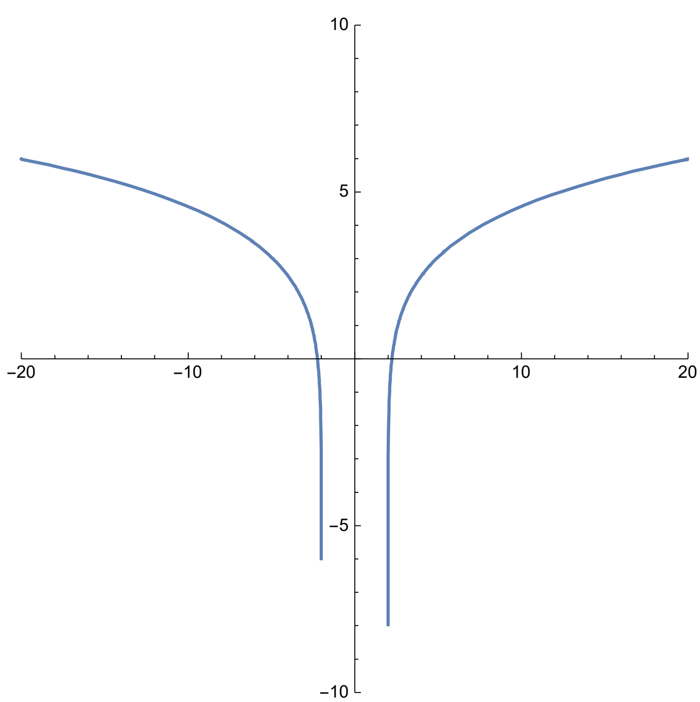
$C^- = \left(-\sqrt{5}, -2\right) \cup \left(2, \sqrt{5}\right)$

Veamos el gráfico de f (x)

$\ln\left(x^2 - 4\right)$

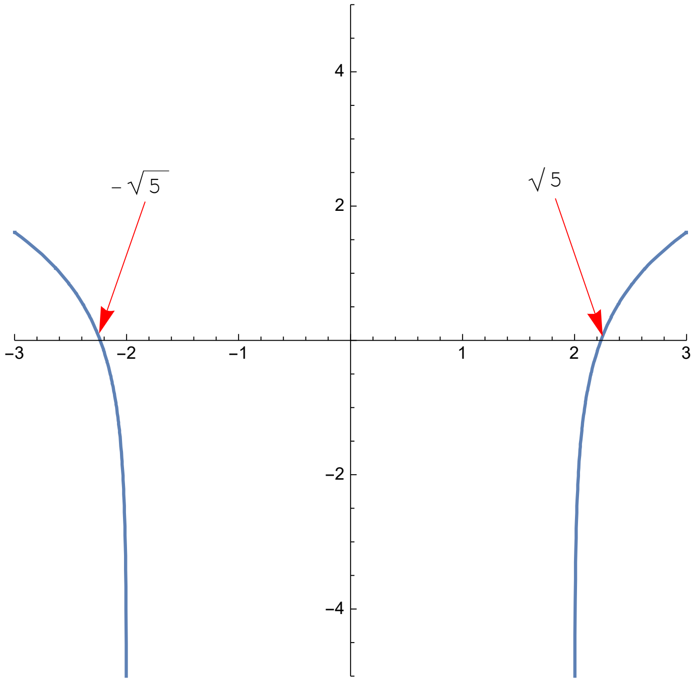
```
graficoEj6b = Plot[Log[x^2 - 4], {x, -20, 20}, PlotRange → {{-20, 20}, {-10, 10}}, AspectRatio → 1]
```

repr··· logaritmo rango de representación cociente de aspecto




```
graficoEj6b = Plot[Log[x^2 - 4], {x, -3, 3}, PlotRange → {{-3, 3}, {-5, 5}}, AspectRatio → 1]
```

repr··· logaritmo rango de representación cociente de aspecto



Ejercicio 7.- Hallar la función inversa f^{-1} y dar su dominio.

a. $f(x) = \dfrac{3}{\ln(x)} + 5$ **b.** $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$

Ej 7 a) **Hallar f^{-1} y calcular Dom $\left(f^{-1}\right)$**

con $f(x) = \dfrac{3}{\ln(x)} + 5$

Calculemos el Dominio de f :

tenemos que ver donde puede haber problemas en la definición de la fórmula de f (x)

1. - Vemos que uno de los problemas en la definición de la fórmula de f (x) está en el denominador

es decir cuando $\ln(x) = 0$

lo cual se da cuando $x = 1$

2. - Además hay otra indefinición que puede darse cuando el ln (x) no está definido, es decir

que deberá ser $x > 0$ **para que se pueda calcular el ln (x)**

Juntando estas dos condiciones los valores posibles de x son los x positivos menos el 1

$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Calculemos la Imagen de f

ponemos $y = \dfrac{3}{\ln(x)} + 5$ **para despejar x como función de y**

$y = \dfrac{3}{\ln(x)} + 5 \implies y - 5 = \dfrac{3}{\ln(x)} \implies \ln(x) = \dfrac{3}{y-5}$ **aplicamos la exponencial** e^x

$e^{\ln(x)} = e^{\frac{3}{y-5}} \implies x = e^{\frac{3}{y-5}}$ (**)

acá vemos que y no puede ser 5 porque si no da cero en el denominador del exponente

Entonces Imagen (f) = $\mathbb{R} - \{5\}$

Definida f como $f(x) = \dfrac{3}{\ln(x)} + 5$

$f : (0, 1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} - \{5\}$ es biyectiva y tiene inversa f^{-1}

intercambiando en (**) $x \leftrightarrow y$ obtenemos $f^{-1}(x)$

Luego $f^{-1}(x) = e^{\frac{3}{x-5}}$

$f^{-1} : \mathbb{R} - \{5\} \longrightarrow (0, 1) \cup (1, +\infty)$

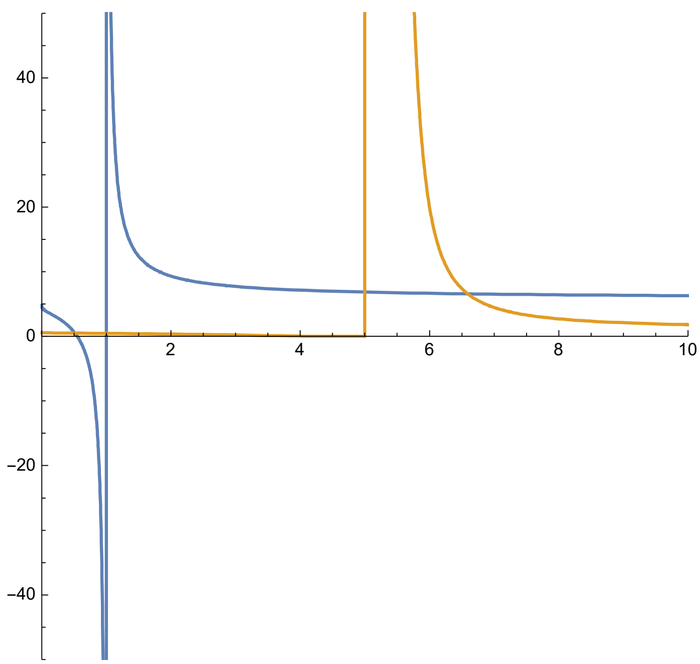
Hagamos el dibujito para verle la facha a f y a f^{-1}

$\dfrac{3}{\ln(x)} + 5 \qquad e^{\frac{3}{x-5}}$

graficoEj7a =

$\text{Plot}\left[\left\{\dfrac{3}{\text{Log}[x]} + 5, e^{\frac{3}{x-5}}\right\}, \{x, 0, 10\}, \text{PlotRange} \to \{\{0, 10\}, \{-50, 50\}\}, \text{AspectRatio} \to 1\right]$

representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



Ej 7 b) Hallar f^{-1} y calcular Dom (f^{-1})

con $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{x}}$

Calculemos el Dominio de f :

tenemos que ver donde puede haber problemas en la definición de la fórmula de f (x)

Como e^{x} es siempre > 0 no hay problemas en la definición de f (x)

Entonces Dom (f) = $\mathbb{R}$

Calculemos la Imagen de f

ponemos $y = \dfrac{2}{1 + e^x}$ **para despejar x como función de y**

$y = \dfrac{2}{1 + e^x} \Longrightarrow 1 + e^x = \dfrac{2}{y} \Longrightarrow e^x = \dfrac{2}{y} - 1$ **aplicamos ln (x)**

$\ln(e^x) = \ln\left(\dfrac{2}{y} - 1\right) \Longrightarrow x = \ln\left(\dfrac{2}{y} - 1\right)$ (%%)

Para calcular las imágenes veamos para qué valores tiene sentido esta última expresión

$\ln\left(\dfrac{2}{y} - 1\right)$

vemos que debe ser $\dfrac{2}{y} - 1 > 0$ **para que se pueda obtener el logaritmo y además** $y \neq 0$ (***)
para que no se indetermine el denominador

De $\dfrac{2}{y} - 1 > 0 \Longrightarrow \dfrac{2 - y}{y} > 0$ **Este cociente será positivo si numerador y denominador tienen el mismo signo es decir :**

$2 - y > 0 \;\wedge\; y > 0$ ó $2 - y < 0 \;\wedge\; y < 0$ $\quad(\wedge$: **significa intersección**$)$

$y < 2 \;\wedge\; y > 0$ ó $y > 2 \;\wedge\; y < 0$

$S_1 = (0, 2) \quad \cup \quad S_2 = \phi$

$S = S_1 \cup S_2 = (0, 2) \cup \phi = (0, 2)$

Entonces Imagen (f) = (0, 2) $($**obsérvese que tambien se cumple** $y \neq 0$ **como pedíamos** (***)$)$

Luego si definimos f como $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^x}$ $\quad f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 2)$ **es biyectiva y tiene inversa** f^{-1}

Solo resta expresar f^{-1} **intercambiando** $x \longleftrightarrow y$ **en (%%)**

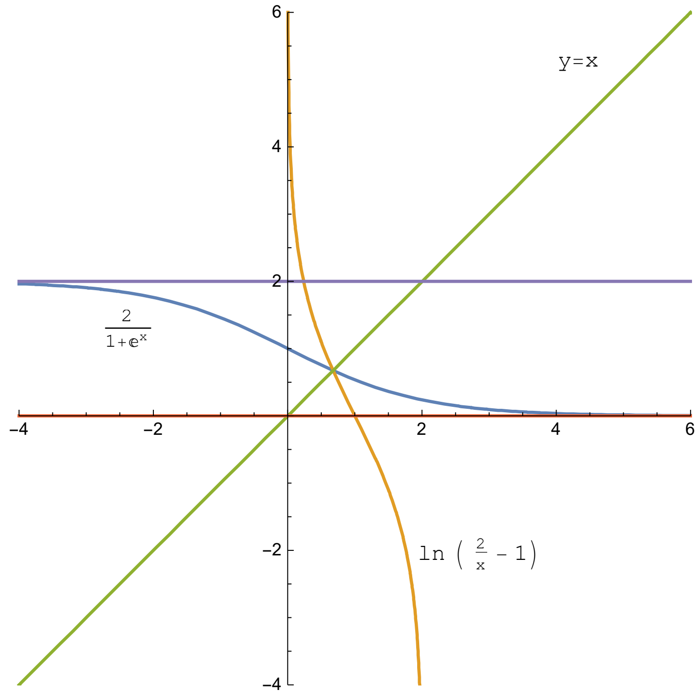
$f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{2}{x} - 1\right) \qquad f^{-1} : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$

Hagamos el dibujito para verle la facha a f y a f^{-1}

$\dfrac{2}{1 + e^x}$ **color azul ;** $\ln\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)$ **color naranja ;** $y = x$ **color verde**

```
graficoEj7b =
 Plot[{2/(1 + e^x), Log[2/x - 1], x, 0, 2}, {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-4, 6}}, AspectRatio → 1]
```

representación g··· logaritmo rango de representación cociente de aspecto



+++

Ejercicio 8.- Sea $f(x)=e^{4x-8}+b$. Hallar el valor de b para que la imagen de f sea el intervalo $(9;+\infty)$. Para el valor de b hallado, calcular la función inversa f^{-1}.

Ej 8) Sea $f(x) = e^{4x-8} + b$

Hallar b para que Imagen (f) = $(9, +\infty)$. Luego calcular f^{-1}

Observemos que la función exponencial cualquiera sea x
tiene como conjunto Imagen $(0, +\infty)$

Si como en f (x), le sumamos el valor b el conjunto Imagen (f) = $(b, +\infty)$

Luego b deberá ser 9

Calculemos analíticamente la Imagen de f

ponemos $y = e^{4x-8} + b$

despejamos x

$y - b = e^{4x-8}$

aplicando logaritmo ln (x)

$\ln(y-b) = \ln\left(e^{4x-8}\right) \Longrightarrow \ln(y-b) = 4x - 8 \Longrightarrow \ln(y-b) + 8 = 4x$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\ln(y-b)+8}{4}$$

De esta expresión vemos que para que el logaritmo esté definido
y se pueda hacer la cuenta, deberá ser

$y - b > 0$ es decir $y > b$

Entonces Imagen (f) = $(b, +\infty)$

Como se pide que Imagen (f) = $(9, +\infty)$ esto se cumplirá si

$b = 9$

Con este valor de $b = 9$ es $f(x) = e^{4x-8} + 9$ calculemos f^{-1}

ponemos $y = e^{4x-8} + 9$

$y - 9 = e^{4x-8}$

aplicando logaritmo ln (x)

$\ln(y-9) = \ln(e^{4x-8}) \implies \ln(y-9) = 4x - 8 \implies \ln(y-9) + 8 = 4x$

$\implies x = \dfrac{\ln(y-9) + 8}{4}$

solo resta intercambiar $x \leftrightarrow y$

Entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(x-9) + 8}{4}$

definida como $f^{-1} : (9, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Ejercicio 11.- Hallar la función exponencial $f(x) = ka^x$ sabiendo que

a. $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$.

b. $f(1) = 7{,}5$ y $f(5) = 292{,}96875$.

Ej 11) Hallar la función exponencial $f(x) = k\,a^x$ si

a) $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$

evaluemos en 0 y en 3

$5 = f(0) = k\,a^0 = k \cdot 1 \implies 5 = k \implies f(x) = 5\,a^x$

Comom además $f(3) = 40$ podremos obtener el valor de la base a

$40 = f(3) = 5\,a^3 \implies \dfrac{40}{5} = a^3 \implies 8 = a^3 \implies a = \sqrt[3]{8} = 2$

Finalmente $f(x) = 5 \cdot 2^x$

+-

Funciones Trigonométricas

Estudiar teoría de los pdf ' s :

funciones_trigonométricas.pdf

estudio_funciones _seno _y _coseno.pdf

Imagen Amplitud y Periodo de func trigonometricas.pdf

Resolver Ejercicios : 12, 13 a, 13 b, 13 c, 13 f, 13 h, 15 a, 15 c,

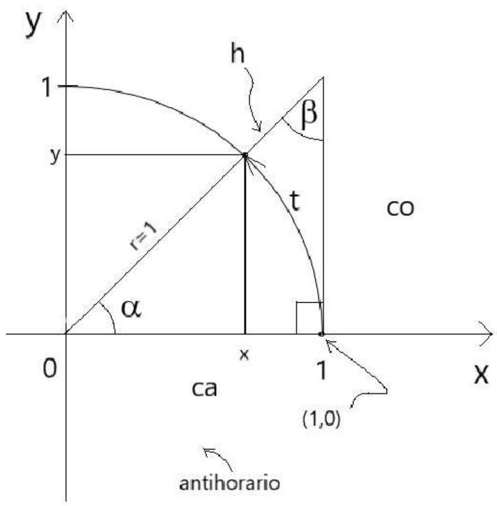
16 b, 16 c, 17 a, 17 c, 19, 21 a y 21 b

Comentarios teóricos sobre funciones trigonométricas

Todos recordarán el concepto de ángulos en triángulos y la introducción de una unidad de medida de ángulos : los grados sexagesimales

Por ejemplo, en el triángulo rectángulo isósceles de base 1 y altura 1 de la siguiente figura :

Por teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de base 1 y altura 1, su hipotenusa es igual a: $h=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°grados sexagesimales

es claro que: $\alpha=45°$ $\beta=45°$

$$\text{sen}(\alpha)=\frac{\text{medida del cateto opuesto a }\alpha}{\text{medida de la hipotenusa}}=\frac{co}{h}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{\text{medida del cateto adyacente a }\alpha}{\text{medida de la hipotenusa}}=\frac{ca}{h}$$

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{medida del cateto opuesto a }\alpha}{\text{medida del cateto adyacente a }\alpha}=\frac{co}{ca}=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

La relación entre grados sexagesimales y radianes viene dada por la siguiente definición

si t es la longitud de arco de circunferencia de radio 1 que se extiende en sentido antihorario desde el punto (1,0) y hasta un punto sobre la circunferencia digamos (x,y), se define:

$$\text{sen}(t)=y \qquad , \qquad \cos(t)=x$$

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y como r=1, la longitud es 2π
Si extendemos un "hilo" sobre la circunferencia de radio1, la longitud del "hilo" es 2π

π es el número irracional con desarrollo decimal infinito no periódico, cuyas primeras cifras son:
$\pi \cong 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494$

Las longitudes de arco se miden en radianes

Si la longitud del arco sobre la circunferencia es t = 2 π radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 360°

Si la longitud del arco sobre la circunferencia es t = π radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 180°

Si t = $\frac{\pi}{2}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 90°

Si $t = \frac{\pi}{4}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 45°

Si $t = \frac{\pi}{3}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 60°

Si $t = \frac{\pi}{6}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 30°

Usualmente las unidades en radianes no se escriben y cuando se dic e $t = \pi$
se sobreentiende que son π radianes

La siguiente fórmula es la que usamos para pasar de radianes a grados sexagesimales :

En general dado un arco de circunferencia de longitud t radianes el ángulo sexagesimal
α que se obtiene es :

$$\alpha = t\,\frac{180}{\pi}$$

las unidades de α son en grados sexagesimales y las de t y π en radianes

Recíprocamente, para pasar de grados sexagesimales α a t radianes usamos esta otra :

$$t = \alpha\,\frac{\pi}{180}$$

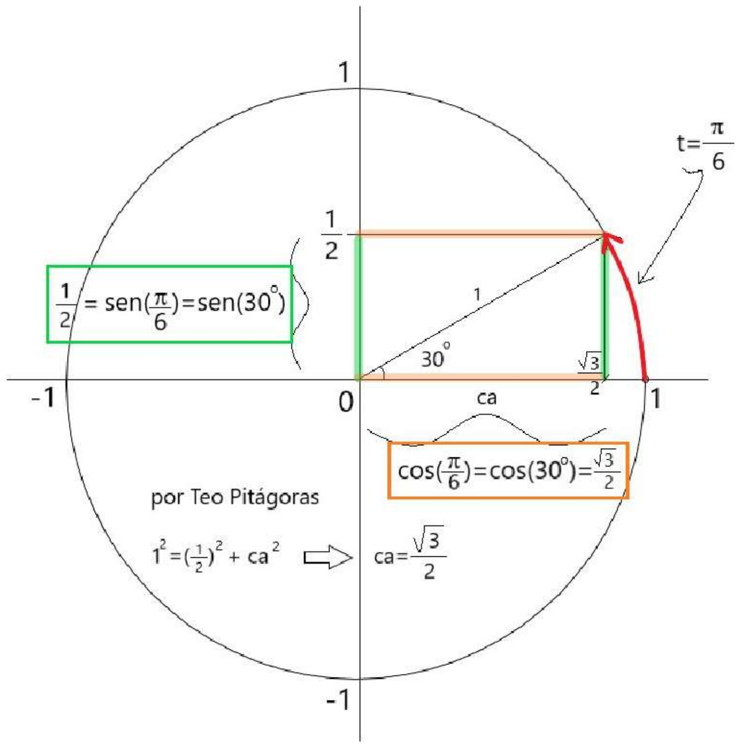
Veamos en particular, cuáles son los valores de seno y coseno para

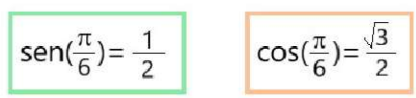
$t = \frac{\pi}{6} \equiv \alpha = 30°$; $t = \frac{\pi}{3} \equiv \alpha = 60°$;

$t = \frac{\pi}{4} \equiv \alpha = 45°$;

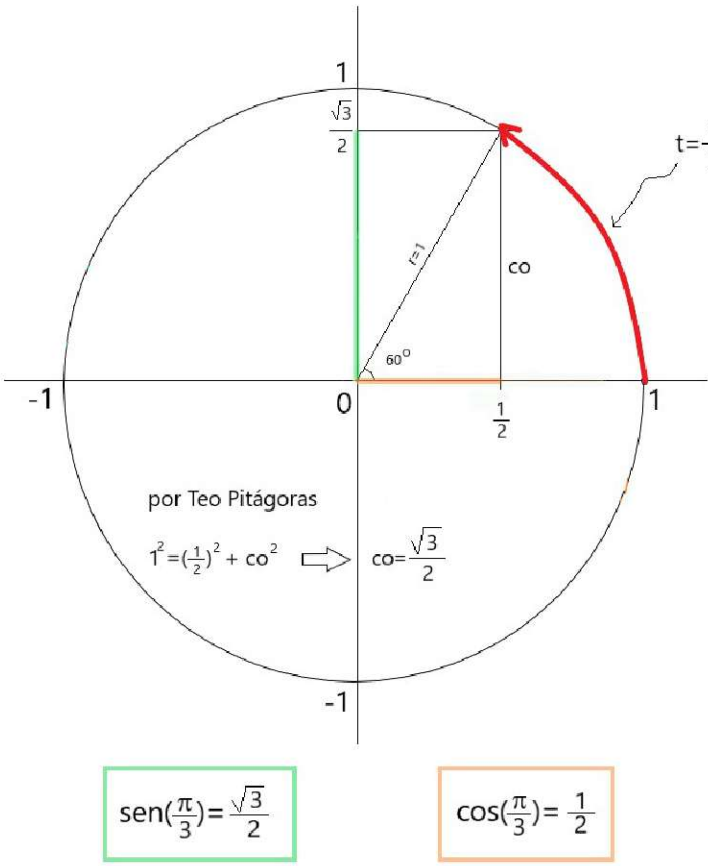
$t = 0\,\pi \equiv \alpha = 0°$; $t = \frac{\pi}{2} \equiv \alpha = 90°$

Si $t = \frac{\pi}{6} \equiv \alpha = 30°$

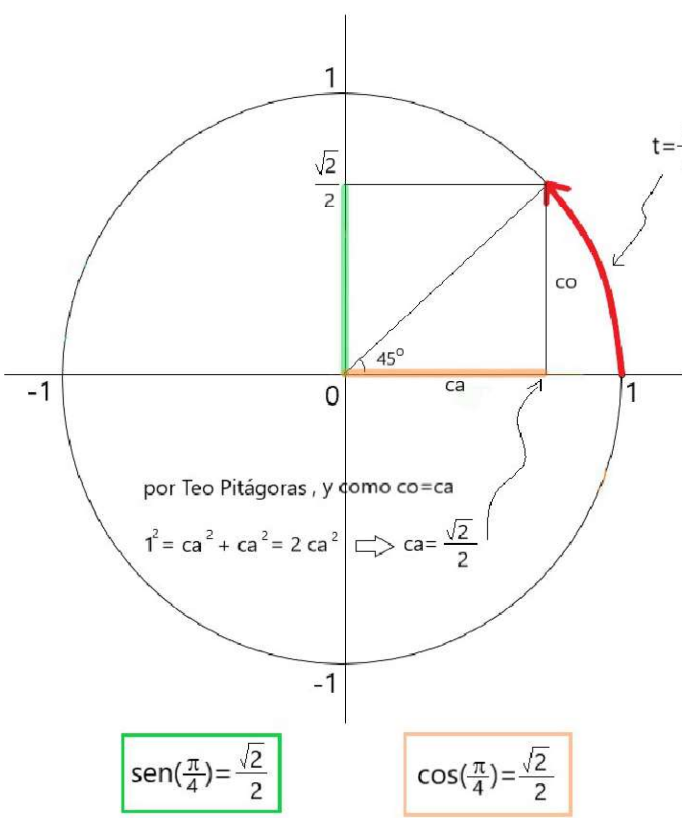




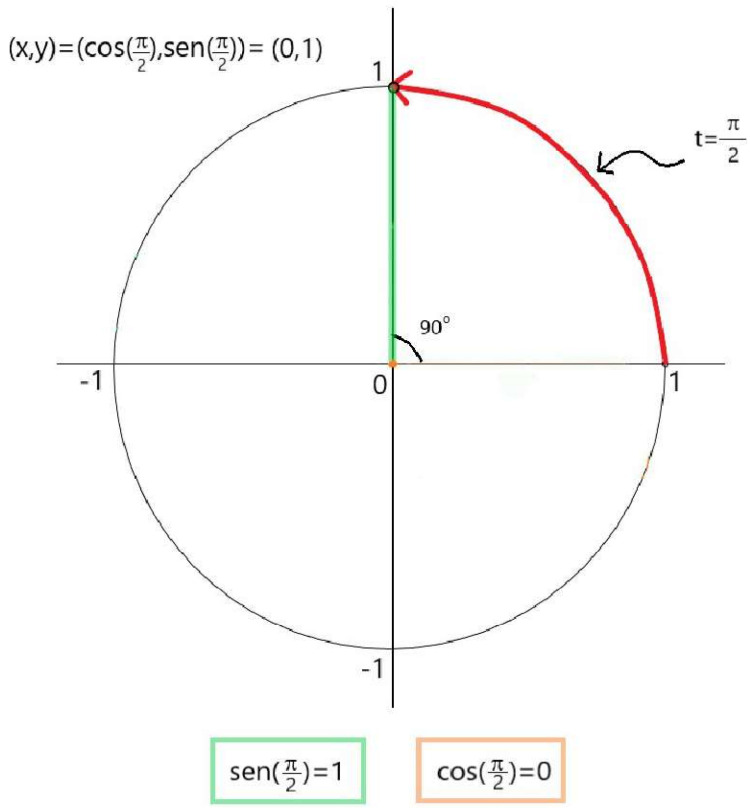
Si $t = \frac{\pi}{3} \equiv \alpha = 60°$



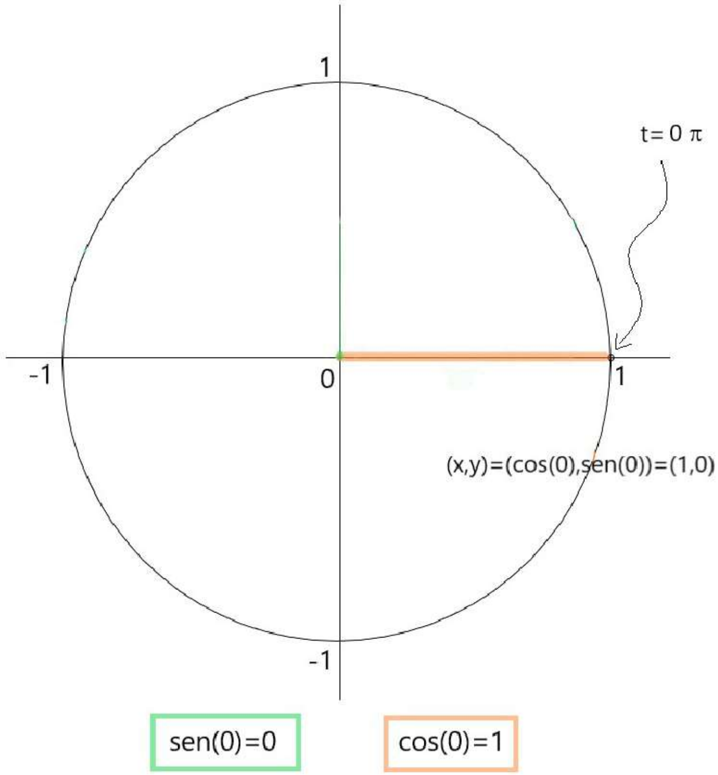
Si t = $\frac{\pi}{4}$ ≡ α = 45°



Si t = $\frac{\pi}{2} \equiv \alpha = 90°$



Si t = $0\,\pi \equiv \alpha = 0°$



Resumiendo :

Si $t = 0\,\pi \equiv \alpha = 0°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = (\cos(0), \operatorname{sen}(0)) = (1, 0)$

Si $t = \frac{\pi}{6} \equiv \alpha = 30°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Si $t = \frac{\pi}{4} \equiv \alpha = 45°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Si $t = \frac{\pi}{3} \equiv \alpha = 60°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Si $t = \frac{\pi}{2} \equiv \alpha = 90°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, 1)$

----

1 er Resultado :

El seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario

dos ángulos son complemnetarios si la suma de ellos es 90°

$$\operatorname{sen}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Ejemplo : $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\,\pi - \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\,\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

es decir

$$\text{sen}\left(30°\right) = \cos\left(60°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

de manera similar :

$$\text{sen}\left(45°\right) = \cos\left(45°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{sen}\left(60°\right) = \cos\left(30°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{sen}\left(0°\right) = \cos\left(90°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(0\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Estos resultados pueden organizarse en la siguiente tabla :

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

----

2 do Resultado :

Como (x, y) = (cos (t), sen (t))

la aplicación del Teorema de Pitágoras al triángulo
de base x = cos (t) y altura y = sen (t)

da la identidad pitagórica que vincula seno y coseno :

$$\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$$

----

ejemplo : apliquemos este resultado a $t = \frac{\pi}{6}$

Mirando en la tabla, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Con estos valores, hagamos la cuenta $\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Se cumple la igualdad.

----

3 er Resultado

Los arcos de circunferencia en radianes o los ángulos
sexagesimales con valores mayores que $\frac{\pi}{2}$ o 90°, por
cuestiones de simetría alcanzan los mismos valores
de seno y coseno, en módulo que los arcos o ángulos entre

0 y $\frac{\pi}{2}$ $\left(0° \text{ y } 90°\right)$

Es decir que los valores de seno y coseno de todos los arcos o ángulos sexagesimales entre 0 y 2π $\left(0° \text{ y } 360°\right)$ pueden obtenerse a partir de los valores de seno y coseno entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ $\left(0° \text{ y } 90°\right)$ considerando los signos positivo o negativo correspondiente.

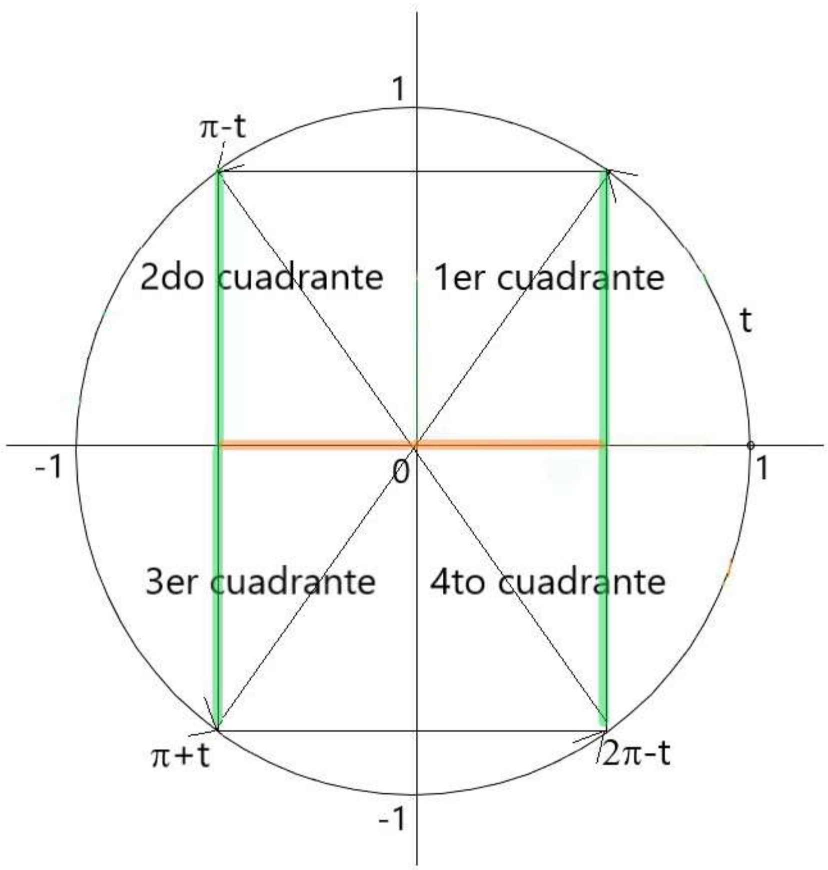
Se definen cuadrantes en sentido antihorario :

Al 1 er cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\left[0°, 90°\right]\right)$

Al 2 do cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $\left(\left[90°, 180°\right]\right)$

Al 3 er cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ $\left(\left[180°, 270°\right]\right)$

Al 4 to cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ $\left(\left[270°, 360°\right]\right)$



el arco t pertenece al 1 er cuadrante

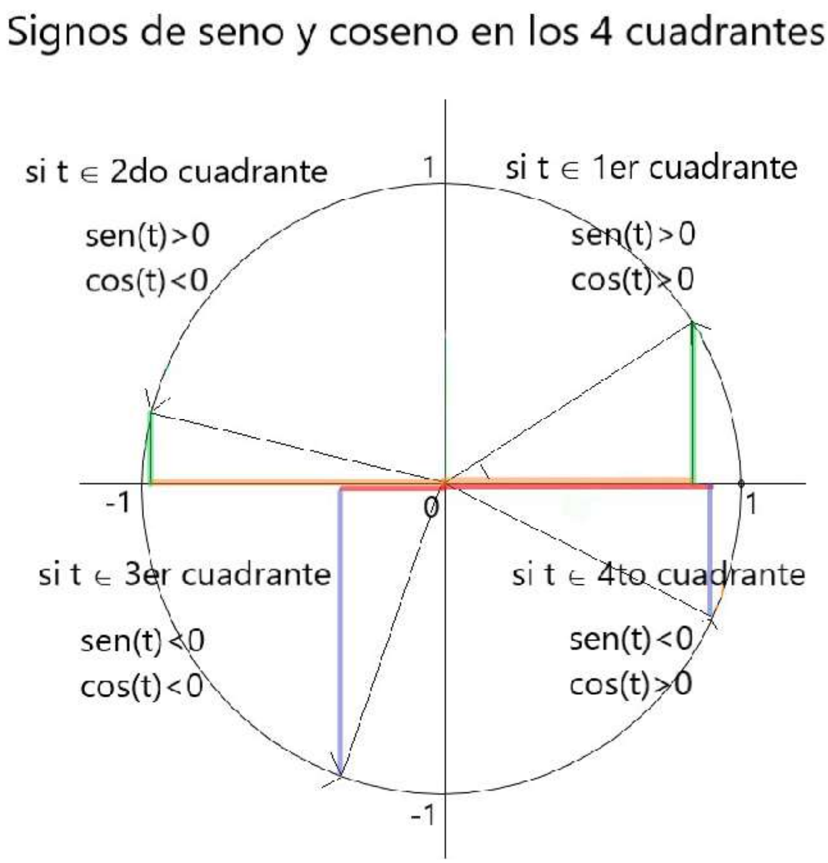
el arco $\pi - t$ pertenece al 2 do cuadrante y forma un triángulo semejante al del 1 er cuadrante

el arco $\pi + t$ pertenece al 3 er cuadrante y forma un triángulo semejante al del 1 er cuadrante

el arco $2\pi - t$ pertenece al 4 to cuadrante y forma un triángulo semejante al del 1 er cuadrante

Por lo tanto los valores de seno y coseno diferirán en algún signo negativo o positivo respecto a los valores de seno y coseno del arco t del 1 er cuadrante

Observen que :



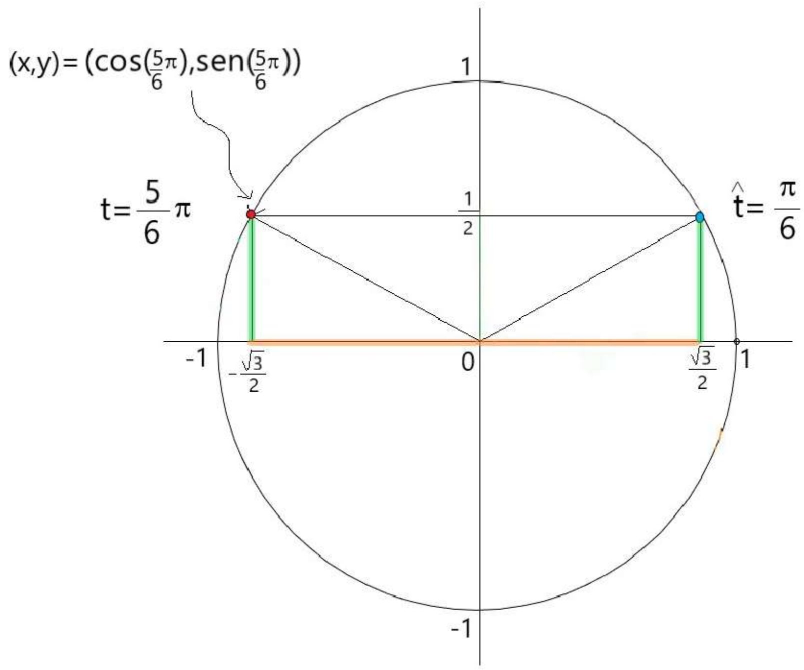
--

Un ejemplo de aplicación :

Calcular el sen $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ y cos $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

Siempre en cálculos de trigonometría tengan a mano la circunferencia de radio 1 para dibujar el arco

Como $\frac{5}{6}\pi$ pertenece al 2 do cuadrante $\left(\text{le falta } \frac{\pi}{6} \text{ para ser } \pi\right)$



si llamamos $\hat{t}$ al arco que genera un triángulo semejante en el 1er cuadrante

$$\hat{t} = \pi - t = \pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{\pi}{6} \quad (30^0)$$

Vemos que :

$$\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

seno y coseno de $\frac{\pi}{6}$ se obtienen de la tabla

Para calcular el seno y coseno de un arco t cualquiera se busca el arco $\hat{t}$ que genera un triángulo semejante en el 1 er cuadrante cuyos seno y coseno de $\hat{t}$ figura en la tabla $\left(\hat{t}\text{ pertenece al 1 er cuadrante}\right)$

si t ∈ 1 er cuadrante ⟹ se usa la tabla

si t ∈ 2 do cuadrante $\Longrightarrow \hat{t} = \pi - t \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) = \text{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = -\cos(\hat{t}) \end{cases}$

si t ∈ 3 er cuadrante $\Longrightarrow \hat{t} = t - \pi \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) = -\text{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = -\cos(\hat{t}) \end{cases}$

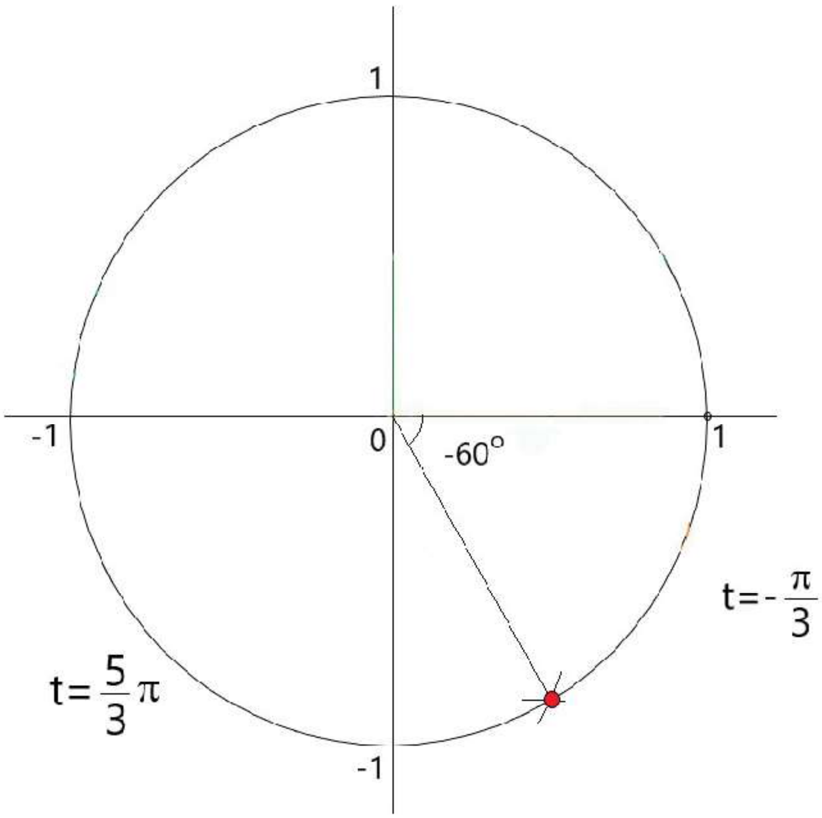
si t ∈ 4 to cuadrante $\Longrightarrow \hat{t} = 2\pi - t \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) = -\text{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = \cos(\hat{t}) \end{cases}$

Arcos positivos y negativos

Por convención los arcos positivos por ej. $t = \frac{5}{6}\pi$ representan arcos que se recorren en sentido antihorario desde el punto $(1, 0)$

Si la circunferencia de radio 1 se recorre desde el punto $(1, 0)$
en sentido horario se consideran arcos negativos

Por ejemplo el arco de $-\frac{\pi}{3}$ **corresponde a un ángulo sexagesimal de** $-60°$



si a $-\frac{\pi}{3}$ le sumamos 2π lo cual da $\frac{5}{3}\pi$
obtenemos el mismo (x,y) sobre la circunferencia de radio 1

Esto quiere decir que:

$$(x,y) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right), \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$$

Y como $t = \frac{5}{3}\pi \in 4$ **to cuadrante, para obtener seno y coseno de** $\frac{5}{3}\pi$

calculamos $\hat{t} = 2\pi - \frac{5}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ **y usamos el resultado**

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(t) = -\operatorname{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = \cos(\hat{t}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalmente podemos concluir que :

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

----

valores aproximados de los arcos en radianes

30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
0.5236	0.7854	1.0472	1.5708	2.0944	2.3562	2.6179	3.14159
210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
3.6652	3.927	4.1888	4.7124	5.236	5.4978	5.7596	6.2832

Funciones trigonométricas del Seno y Coseno

Está claro que dado un arco de longitud $t < 2\pi$ recorrido desde el punto $P = (1, 0)$

sobre la circunferencia de radio 1, en sentido antihorario, y que termina

en el punto $(x, y) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, si consideramos otro arco de longitud

$t + 2\pi$ terminará en el mismo punto (x, y) (dió una vuelta completa)

Como el (x, y) es el mismo, se desprende que :

$\cos(t) = \cos(t + 2\pi)$ y $\text{sen}(t) = \text{sen}(t + 2\pi)$ (periodicidad)

Lo mismo sucede si recorremos la circunferencia en sentido horario.

En este caso :

$\cos(t) = \cos(t - 2\pi)$ y $\text{sen}(t) = \text{sen}(t - 2\pi)$

porque terminan en el mismo punto (x, y)

Esta propiedad se generaliza a cualquier cantidad de vueltas que se dé en un sentido
o en el otro escribiendo :

$$\cos(t) = \cos(t + k \cdot 2\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

$\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros $(\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$

De manera similar :

$$\text{sen}(t) = \text{sen}(t + k \cdot 2\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

Si k es positivo se recorren las vueltas de 2 π en sentido antihorario

Si k es negativo se recorren las vueltas de 2 π en sentido horario

Esta propiedad de periodicidad de los valores que toman seno y coseno de arcos

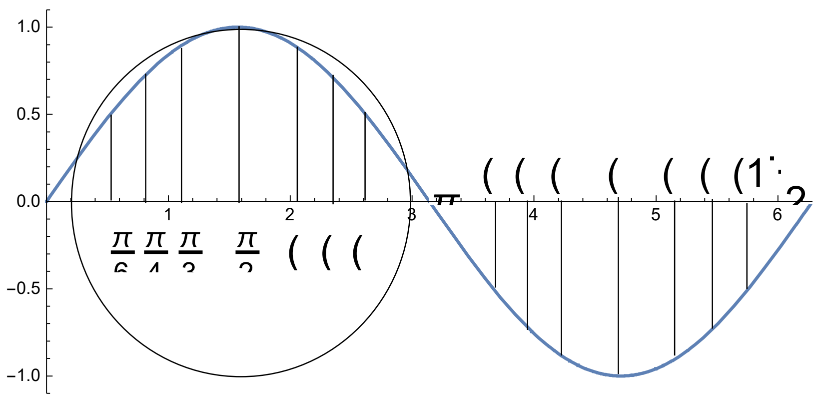
sobre la circunferencia de radio 1 nos permite definir una relación

que es una función y que a cada arco x ∈ ℝ le asigne el sen (x)

$$f(x) = \text{sen}(x) \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si a medida x que vamos recorriendo la circunferencia de radio 1 anotamos los valores de sen (x) se obtiene un gráfico (entre [0, 2 π]) como el siguiente

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 π}, PlotRange → {{0, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repr⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



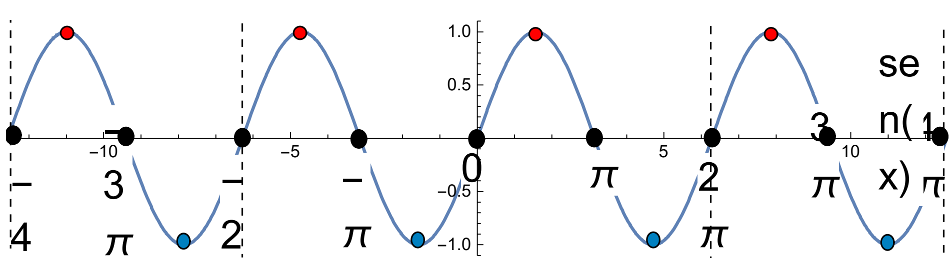
Si seguimos dando vueltas a la circunferencia de radio 1 con sentido antihorario es decir extendemos los x a + ∞ el gráfico se extiende periódicamente a + ∞

Si por otra parte damos vueltas a la circunferencia de radio 1 con sentido horario es decir extendemos los x a - ∞ el gráfico se extiende periódicamente a - ∞

Vemos que el período o sea el intervalo de x (arco) para el cual los valores de sen (x) se repiten es cada T = 2 π

Como los valores de "y" ordenadas del punto (x, y) = (cos (x), sen (x)) en la circunferencia de radio 1 alcanzan valores entre - 1 y 1 se ve que el conjunto imagen del sen (x) es Imagen (f) = [-1, 1]

```
Plot[Sin[x], {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.25]
```
repr⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



C^0 Conjunto de ceros del sen (x)

Observando el gráfico del sen (x) observamos un conjunto infinito de ceros marcados con color negro que se repiten cada medio período (cada π) y éstos son :

$C^0 = \{ \ldots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots\}$

El conjunto infinito de ceros se escriben utilizando los números enteros así :

$$x_0 = 0 + k\pi = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

(si $k = -3$, $x = -3\pi$ o si $k = 10$, $x = 10\pi$ son ceros de sen (x))

Máximos del sen (x)

Además, vemos que sen (x) alcanza el valor máximo de 1 en $x = \frac{\pi}{2}$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color rojo

Este conjunto de máximos del sen (x) se escriben así :

$$x_M = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

(por ej. si $k = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$ es un máximo de sen (x)

por ej. si $k = 3$, $x = \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2}$ es un máximo de sen (x))

Mínimos del sen (x)

Además, vemos que sen (x) alcanza el valor mínimo de -1 en $x = -\frac{\pi}{2}$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color azulino

Este conjunto de mínimos del sen (x) se escriben así :

$$x_m = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

(por ej. si $k = -2$, $x = -\frac{\pi}{2} + (-2) \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5\pi}{2}$ es un mínimo de sen (x)

por ej. si $k = 1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ es un mínimo de sen (x))

C^+ Conjunto de Positividad del sen (x)

Asimismo, el gráfico del sen (x) nos permite escribir el conjunto de positividad como unión infinita de intervalos

$C^+ = \ldots \cup (-4\pi, -3\pi) \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \ldots$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos → $k \cdot 2\pi = 2k\pi$

extremos derechos de los intervalos → $k \cdot 2\pi + \pi = (2k+1)\pi$

$$C^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(2k\pi,\ (2k+1)\pi\right)$$

(por ej. si $k = -2$, el intervalo $\left(2 \cdot (-2)\pi,\ (2(-2)+1)\pi\right) = (-4\pi, -3\pi)$

pertenece al C^+ del sen (x))

C^- Conjunto de Negatividad del sen (x)

De manera similar, el gráfico del sen (x) nos permite escribir el conjunto de negatividad como unión infinita de intervalos

$C^- = \ldots \cup (-3\pi, -2\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi) \cup (5\pi, 6\pi) \cup \ldots$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos → $\pi + k \cdot 2\pi = (2k+1)\pi$

extremos derechos de los intervalos → $2\pi + k \cdot 2\pi = (2k+2)\pi$

$$C^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left((2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi\right)$$

(por ej. si $k = -1$, el intervalo $\left(2 \cdot (-1)+1)\pi,\ (2(-1)+2)\pi\right) = (-\pi, 0\pi)$

y si $k = 2$, el intervalo $\left((2 \cdot 2+1)\pi,\ (2 \cdot 2+2)\pi\right) = (5\pi, 6\pi)$

pertenecen al C^- del sen (x)

++

De la misma forma que se construye el sen (x) se define la función cos (x) recorriendo la circunferencia de radio 1 en sentido antihorario (arcos x positivos) y en sentido horario (arcos x negativos) anotando para cada x el valor que va tomando el cos (x)

$$f(x) = \cos(x) \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Usaremos una propiedad que dice que :

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(b) \cdot \cos(a)$$

que si $a = x$ y $b = \frac{\pi}{2}$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(x)$$

y como $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (ver tabla de valores de seno y coseno)

se obtiene :

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(x) = 0 + \cos(x) \quad , \quad \text{entonces :}$$

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$$

Por lo tanto, el gráfico de cos (x) será el que se obtenga de trasladar rígidamente $\frac{\pi}{2}$, hacia la izquierda según las x, el gráfico de sen (x)

Nota : ver Composición de funciones - Cambio de escala archivoPDF en donde se explicaron los efectos de composiciones a derecha e izquierda

Efectivamente, si componemos a derecha g (x) = sen (x) con h (x) = $x+\frac{\pi}{2}$

$$g_{\circ}h(x)=g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

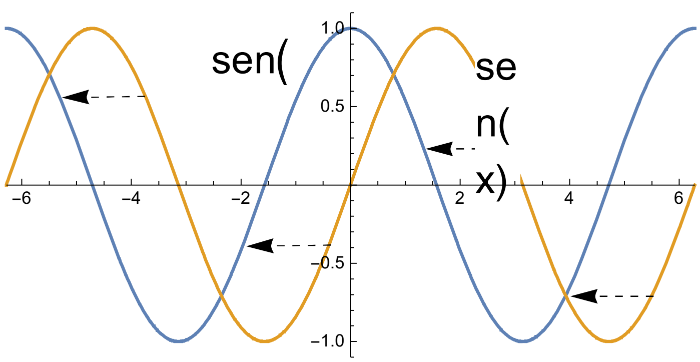
Esta composición a derecha produce una traslación según las x y hacia la izquierda en $\frac{\pi}{2}$

En el siguiente gráfico se grafican sen (x) y sen $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ en donde se observa el desplazamiento referido

Por lo tanto, el gráfico del cos (x) es igual al gráfico de sen $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

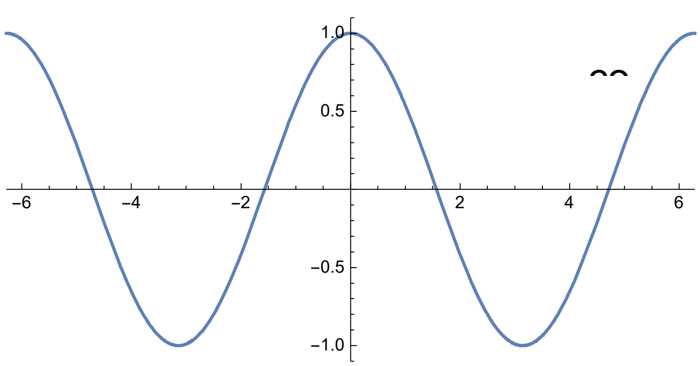
```
Plot[{Sin[x + π/2], Sin[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· | seno | seno | rango de representación | cociente de aspecto




```
Plot[Cos[x], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repr··· | coseno | rango de representación | cociente de aspecto



Nota : para practicar rotaciones y traslaciones con composición de funciones :

Usando la relación de complementariedad entre coseno y seno

que dice que :

$$\cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

("coseno de un ángulo es igual al seno del ángulo complementario y viceversa: seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario - ángulos complementarios suman 90°")

hubiéramos arribado también al gráfico de cos (x)

el gráfico del coseno será semejante al del seno x con

alguna traslación y rotación

si escribimos el argumento del sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **como sen** $\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

el gráfico de cos (x) se obtendrá a partir del gráfico del sen (x)

si primero rotamos rígidamente el gráfico del sen (x) alrededor

del eje x y luego a este último lo trasladamos $\frac{\pi}{2}$ **a la derecha**

Nota : ver Composición de funciones - Cambio de escala archivoPDF
en donde se explicaron los efectos de composiciones a derecha e izquierda)

Efectivamente, si componemos a derecha g (x) = sen (x) con h (x) = -x

$$g_\circ h(x) = g(-x) = \operatorname{sen}(-x)$$

le produce al sen (x) una rotación rígida respecto al eje x

Si a $g_\circ h(x)$ la llamamos S (x) = sen (-x) y si componemos a derecha con

R (x) = x - $\frac{\pi}{2}$ **tendremos :**

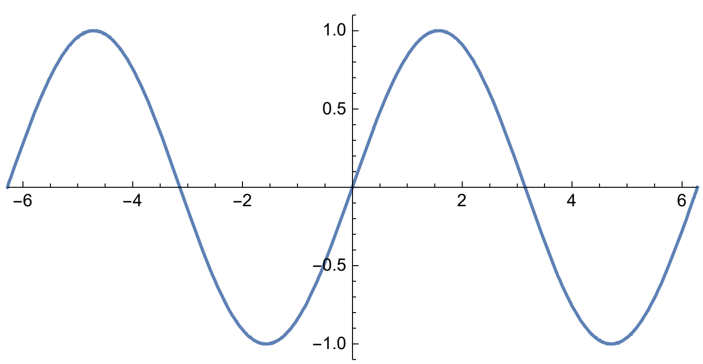
$$S_\circ R(x) = S\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Esta última composición a derecha $S_\circ R(x)$ le produce a S (x) = sen (-x)

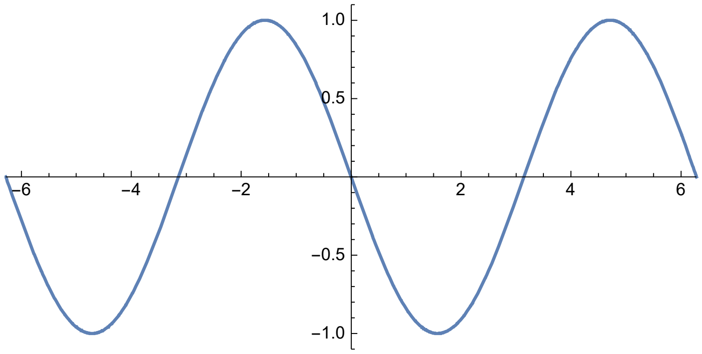
una traslación rígida hacia la derecha en $\frac{\pi}{2}$ **sobre las x**

```
Plot[Sin[x], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

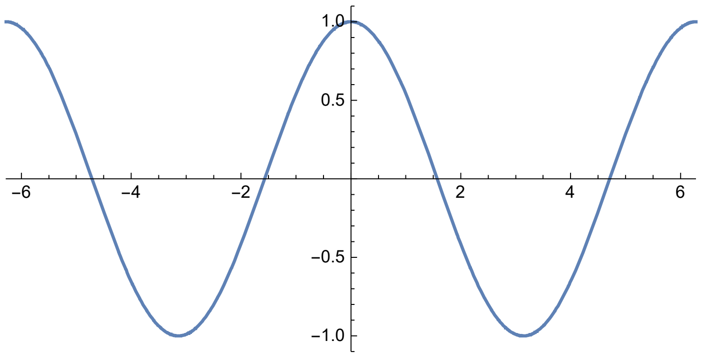
re··· seno rango de representación cociente de aspecto



```
Plot[Sin[-x], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
re··· seno rango de representación cociente de aspecto




```
Plot[Sin[-(x - π/2)], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
re··· seno rango de representación cociente de aspecto



Este último es el gráfico del cos (x) = sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en el intervalo [-2 π, 2 π]

Proseguimos con el análisis de la función cos (x) :

Hemos obtenido el gráfico de cos (x) a partir del gráfico del sen (x)

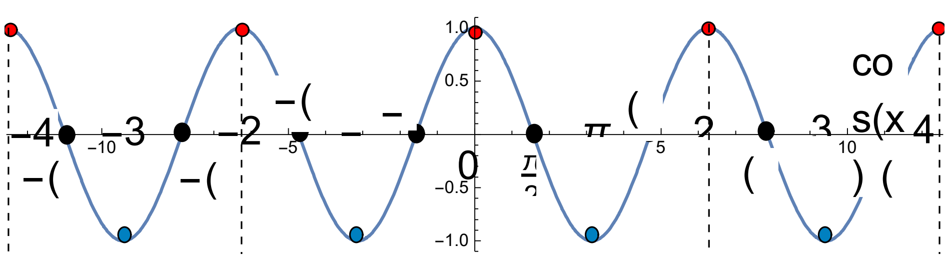
usando la propiedad cos (x) = sen $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

De manera similar se define

f (x) = cos (x)   f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Veamos el gráfico de cos (x) para x entre [- 4 π, 4 π]

```
Plot[Cos[x], {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.25]
```
repr··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Vemos que el período o sea el intervalo de x (arco) para el cual los valores de cos (x) se repiten es cada $T = 2\pi$

Como los valores de x,
abscisas de los puntos (x, y) = (cos (t), sen (t)) de la circunferencia de radio 1
alcanzan valores entre -1 y 1
se ve que el conjunto imagen del cos (x) es : Imagen (f) = [-1, 1]

C^0 Conjunto de ceros del cos (x)

Observando el gráfico del cos (x) se aprecia un conjunto infinito de ceros marcados con color negro que se repiten cada medio período (cada π) y éstos son :

$$C^0 = \left\{ \ldots, -\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \ldots \right\}$$

El conjunto infinito de ceros se escribe utilizando los números enteros así :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\text{si } k = -3,\ x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5}{2}\pi \ \text{ o } \ \text{si } k = 3,\ x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7}{2}\pi \ \text{son ceros de cos (x)}\right)$$

Máximos del cos (x)

Además, vemos que cos (x) alcanza el valor máximo de 1 en x = 0, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color rojo

Este conjunto de máximos del cos (x) se escriben así :

$$x_M = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$\Big($**por ej. si** $k = -1,\ x = (-1) \cdot 2\pi = -2\pi$ **es un máximo de cos (x)**

por ej. si $k = 2,\ x = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$ **es un máximo de cos (x)**$\Big)$

Mínimos del cos (x)

Además, vemos que cos (x) alcanza el valor mínimo de -1 en $x = \pi$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color azulino

Este conjunto de mínimos del cos (x) se escriben así :

$$x_m = \pi + k \cdot 2\pi = (2k + 1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$\Big($**por ej. si** $k = -2,\ x = (2 \cdot (-2) + 1)\pi = -3\pi$ **es un mínimo de cos (x)**

por ej. si $k = 1,\ x = (2 \cdot 1 + 1)\pi = 3\pi$ **es un mínimo de cos (x)**$\Big)$

C^+ Conjunto de Positividad del cos (x)

Asimismo, el gráfico del cos (x) nos permite escribir el conjunto de positividad como unión infinita de intervalos

$C^+ = \ldots \cup \left(-\frac{9}{2}\pi,\ -\frac{7}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{5}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi\right) \cup \ldots$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\to -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$

extremos derechos de los intervalos $\to \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$

$$C^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

(**por ej. si** $k = -2$, **el intervalo** $\left(\left(2(-2) - \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2(-2) + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \left(-\frac{9}{2}\pi,\ -\frac{7}{2}\pi\right)$

pertenece al C^+ del cos (x))

C^- Conjunto de Negatividad del cos (x)

De manera similar, el gráfico del cos (x) nos permite escribir el conjunto de negatividad como unión infinita de intervalos

$C^- = \ldots \cup \left(-\frac{7}{2}\pi,\ -\frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{2}\pi,\ \frac{11}{2}\pi\right) \cup \ldots$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\to \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$

extremos derechos de los intervalos $\to \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$

$$C^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi\right)$$

(**por ej. si** $k = -1$, **el intervalo** $\left(\left(2(-1) + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2(-1) + \frac{3}{2}\right)\pi\right) = \left(-\frac{7}{2}\pi,\ -\frac{5}{2}\pi\right)$

y si $k = 2$, **el intervalo** $\left(\left(2 \cdot 2 + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2 \cdot 2 + \frac{3}{2}\right)\pi\right) = \left(\frac{9}{2}\pi,\ \frac{11}{2}\pi\right)$

pertenecen al C^- del cos (x)

----

nota :

$f(x) = \cos(x)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **es continua en todo** $\mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **es continua en todo** $\mathbb{R}$

++

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejercicio 12.- Completar la tabla.

a.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen}(x)$		$1/2$			
$\cos(x)$			$\sqrt{2}/2$	$1/2$	

Ej 12 a) de acuerdo a lo que estuvimos desarrollando en este documento :

$\text{sen}\left(0\right) = 0$ $\qquad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(0\right) = 1$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Estos resultados pueden organizarse en la siguiente tabla :

	0º	30º	45º	60º	90º
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ej 12 b) completar la tabla

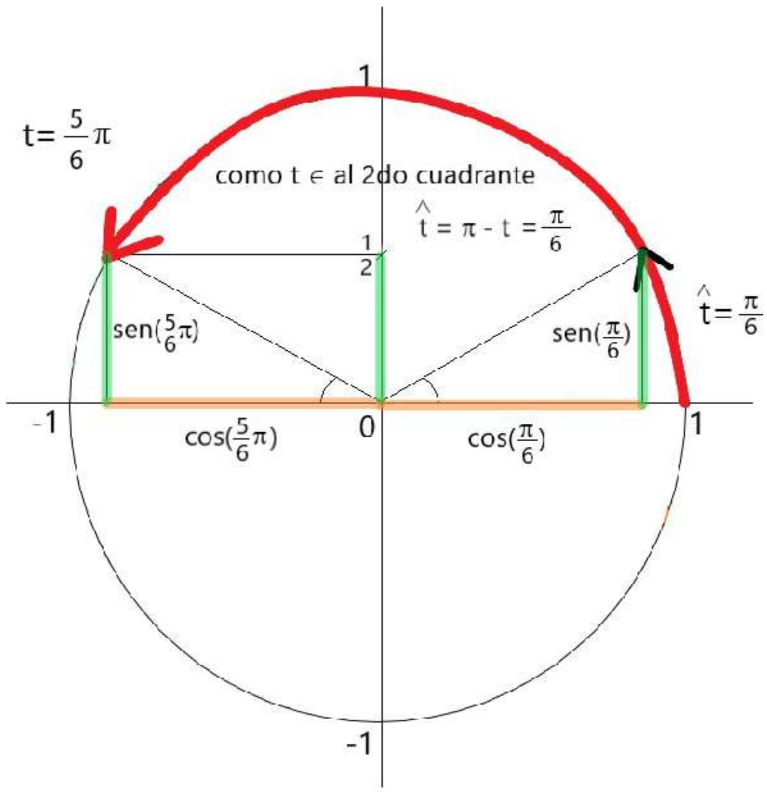
b.

x	$\frac{5}{6}\pi$	$-\pi/3$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\pi/3$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\pi/4$
$\operatorname{sen}(x)$								
$\cos(x)$								

----

si t = $\frac{5}{6}\pi$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de 150°)

pertenece al 2 do cuadrante :



Del gráfico se ve que los valores de seno y coseno de $\frac{5}{6}\pi$

del

coinciden, en valor absoluto, con los valores del seno y coseno del arco reducido al 1 er cuadrante $\hat{t} = \pi - t$

es decir $\hat{t} = \pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi \quad \Longrightarrow \quad \hat{t} = \frac{\pi}{6}$

Además observando el diagrama de la circunferencia se ve que

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{y} \quad \text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Mirando la tabla de valores de seno y coseno para arcos en el 1 er cuadrante $\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ y } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Por lo tanto,

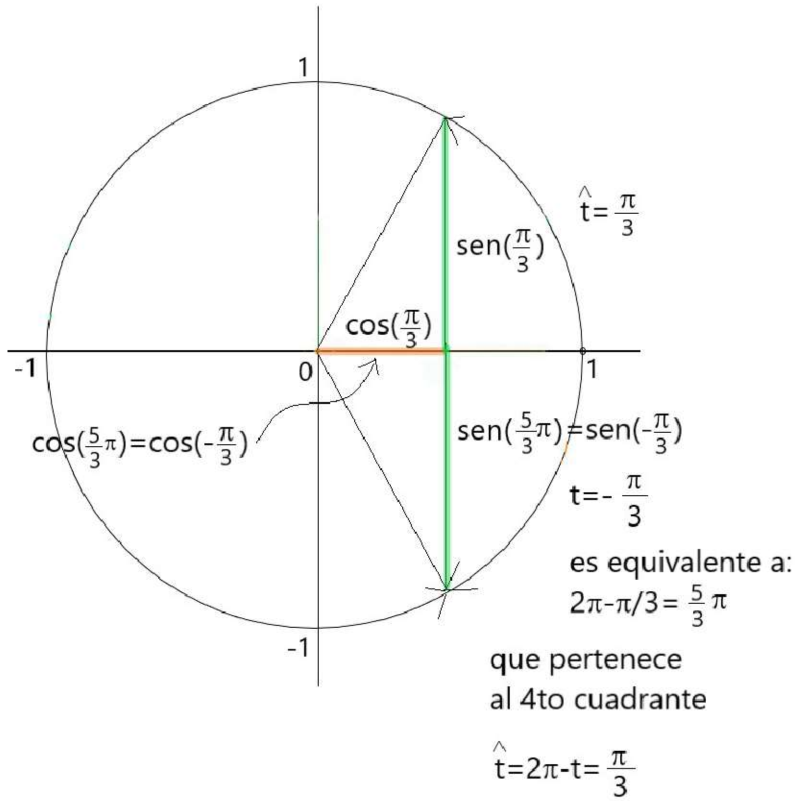
$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y}$$

$$\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Ahora $t = -\frac{\pi}{3}$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de** $-60°$**)**

Hagamos el gráfico de la circunferencia de radio 1 y marquemos

$t = -\frac{\pi}{3}$ **(al ser negativo se recorre en sentido horario)**



Entonces

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

mirando en tabla de valores de seno y coseno para arcos del
1 er cuadrante y como :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora $t = \frac{5}{4}\pi$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de 225°)**

Como t pertenece al 3 er cuadrante :

$$\hat{t} = t - \pi \implies \hat{t} = \frac{5}{4}\pi - \pi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Si hacen el diagrama de la circunferencia de radio y marcan

$t = \frac{5}{4}\pi \quad y \quad \hat{t} = \frac{\pi}{4}$

podrán ver que :

$$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora $t = \frac{7}{3}\pi$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de 420°)**

como $\frac{6}{3}\pi = 2\pi$ **este arco** $t = \frac{7}{3}\pi$ **se pasó** $\frac{\pi}{3}$ **de 1 vuelta y termina**

en el mismo (x, y) sobre la circunferencia de radio 1 que para $\frac{\pi}{3}$

Analíticamente decimos que a $t = \frac{7}{3}\pi$ **le restamos 1 vuelta de** 2π

para obtener $\hat{t} = \frac{7}{3}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{3}$

Entonces

$t = \frac{7}{3}\pi \quad y \quad \hat{t} = \frac{\pi}{3}$

Por lo tanto

$$\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora $t = -\frac{3}{4}\pi$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de -135°)**

Si hacen el gráfico de la circunferencia de radio 1 y marcan

$t = -\frac{3}{4}\pi$ **(al ser negativo se recorre en sentido horario)**

va a "caer" en el 3 er cuadrante

El análogo positivo de $-\frac{3}{4}\pi$ **se obtiene sumando** 2π

Entonces $t = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{5}{4}\pi$ **(225°)**

El correspondiente arco del 1 er cuadrante que tiene valores de seno y coseno iguales en valor absoluto a $t = \frac{5}{4}\pi$ **es** $\hat{t}$

$\hat{t} = t - \pi = \frac{5}{4}\pi - \pi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \hat{t} = \frac{\pi}{4}$

Si miran el diagrama que hicieron de la circunferencia de radio 1

con los arcos $t = \frac{5}{4}\pi$ **y** $\hat{t} = \frac{\pi}{4}$

verán que :

$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **y** $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

De la tabla obtenemos los valores de

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto

$$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) == -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora $t = \frac{\pi}{3}$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de 60°)**

los valores de seno y coseno ya están tabulados por ser
del 1 er cuadrante

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora $t = \frac{7}{6}\pi$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de 210°)**

t pertenece al 3 er cuadrante

Por lo tanto

el arco del 1 er cuadrante que genera valores de seno y coseno iguales
en valor absoluto es $\hat{t} = t - \pi$ **:**

$\hat{t} = \frac{7}{6}\pi - \pi = \frac{\pi}{6}$

Si miran el diagrama que hicieron de la circunferencia de radio 1

con los arcos $t = \frac{7}{6}\pi$ **y** $\hat{t} = \frac{\pi}{6}$

se ve que

$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **y** $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Como por tabla $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **y** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Finalmente tenemos :

$$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Ahora $t = -\frac{\pi}{4}$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de $-45°$)

Si hacen el gráfico de la circunferencia de radio 1 y marcan

$t = -\frac{\pi}{4}$ (al ser negativo se recorre en sentido horario)

va a "caer" en el 4 to cuadrante

El análogo positivo de $t = -\frac{\pi}{4}$ es , sumando 2π, y lo llamamos $\tilde{t}$

$$\tilde{t} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$$

Por lo tanto

el arco del 1 er cuadrante que genera valores de seno y coseno iguales en valor absoluto es $\hat{t} = 2\pi - \tilde{t}$:

$$\hat{t} = 2\pi - \frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Si miran el diagrama que hicieron de la circunferencia de radio 1 con los arcos $t = -\frac{\pi}{4}$, $\tilde{t} = \frac{7}{4}\pi$ y $\hat{t} = \frac{\pi}{4}$

se ve que :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Como por tabla $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Finalmente tenemos :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resumiendo lo calculado :

$\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ y $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) == -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Con todos estos cálculos, completemos la tabla de Ej 12 b)

b.

x	$\frac{5}{6}\pi$	$-\pi/3$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\pi/3$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\pi/4$
$\text{sen}(x)$								
$\cos(x)$								

	150º	-60º	225º	420º	−135º	60º	210º	−45º
t	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$
sen(t)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos(t)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

++

Ejercicio 13.- Encontrar todos los $x \in [-\pi;\pi]$ tales que

a. $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$

b. $\operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\operatorname{sen}(x) = -1$

e. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

g. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h. $\cos(x) = 1$

Ej 13 a)

Para la resolución de ecuaciones con funciones trigonométricas tenemos que acudir a :

.- diagrama de la circunferencia de radio 1

.- tabla de valores de seno y coseno en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

.- gráfico de la función seno o coseno

Resolver la ecuación trigonométrica

sen (x) = $\frac{1}{2}$ **no es otra cosa que encontrar los puntos de intersección**

de la función sen (x) con una función lineal constante g (x) = $\frac{1}{2}$

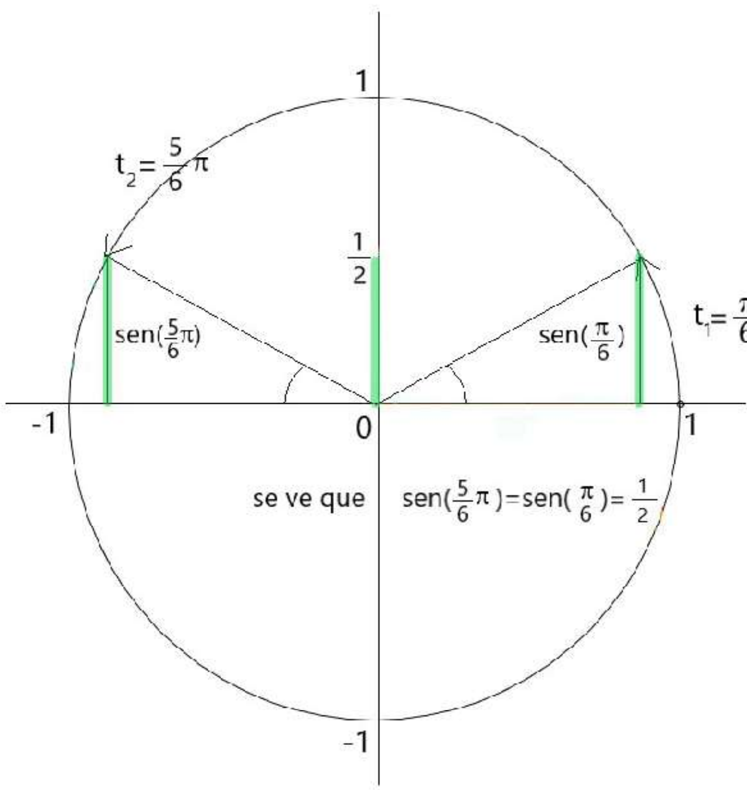
Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que sen (t) = $\frac{1}{2}$ para t = $\frac{\pi}{6}$ (30° grados sexagesimales)

Pero no es la única solución

Hagamos el diagrama de la circunferencia de radio 1 para marcar los arcos cuyo seno es $\frac{1}{2}$

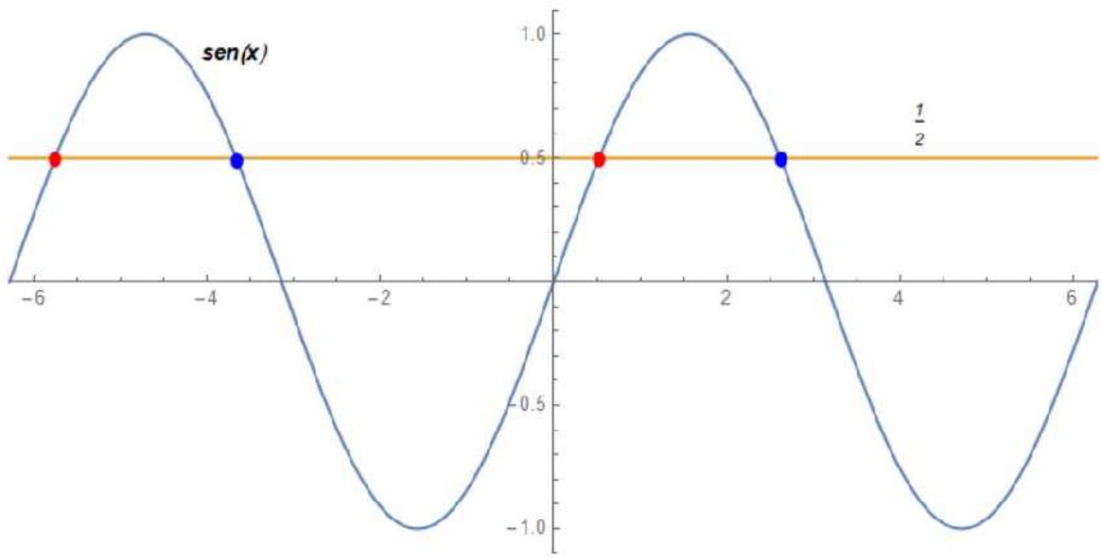


Del diagrama vemos que no solamente t = $\frac{\pi}{6}$ es solución de sen (t) = $\frac{1}{2}$
del

sino que también t = $\frac{5}{6}\pi$ verifica la ecuación

Veamos un gráfico conjunto de sen (x) y la recta horizontal y = $\frac{1}{2}$ **:**

```
Plot[{Sin[x], 1/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**, el punto de color rojo es la solución** $x = \frac{\pi}{6}$

y el de color azul corresponde a $x = \frac{5}{6}\pi$

Pero como el gráfico de sen (x) se extiende a + y - ∞

habrá dos conjuntos infinitos de soluciones de la ecuación sen (x) $= \frac{1}{2}$

el conjunto de los puntos rojos y el conjunto de los puntos azules

Es la característica de periodicidad y simetría de la función sen (x) la que hace que existan estos dos conjuntos infinitos de soluciones

Obsérvese que tanto los puntos rojos como los azules se repiten cada vuelta de 2 π **recorridas tanto en sentido antihorario como en sentido horario**

El primer conjunto, generado por la solución de color rojo, se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto, generado por la solución de color azul, se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \;, \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación sen (x) $= \frac{1}{2}$ **para** $x \in \mathbb{R}$ **es :**

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \;, \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercicio 13 a) nos piden encontrar sólo las soluciones de
seno

sen (x) = $\frac{1}{2}$ para x ∈ $[-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero veamos cuáles de las soluciones "rojas" pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ **es una de ellas pues** $\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$

si $k = -1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{11}{6}\pi < -\pi$

si $k = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{13}{6}\pi > \pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{6}$ **sólo** $\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones "azules" pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi$ **es una de ellas pues** $\frac{5}{6}\pi \in [-\pi, \pi]$

si $z = 1 \Longrightarrow x = \frac{5}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{17}{6}\pi > \pi$

si $z = -1 \Longrightarrow x = \frac{5}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{7}{6}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{5}{6}\pi$ **sólo** $\frac{5}{6}\pi \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{\frac{5}{6}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de sen (x) = $\frac{1}{2}$ **para x ∈ $[-\pi, \pi]$ son**

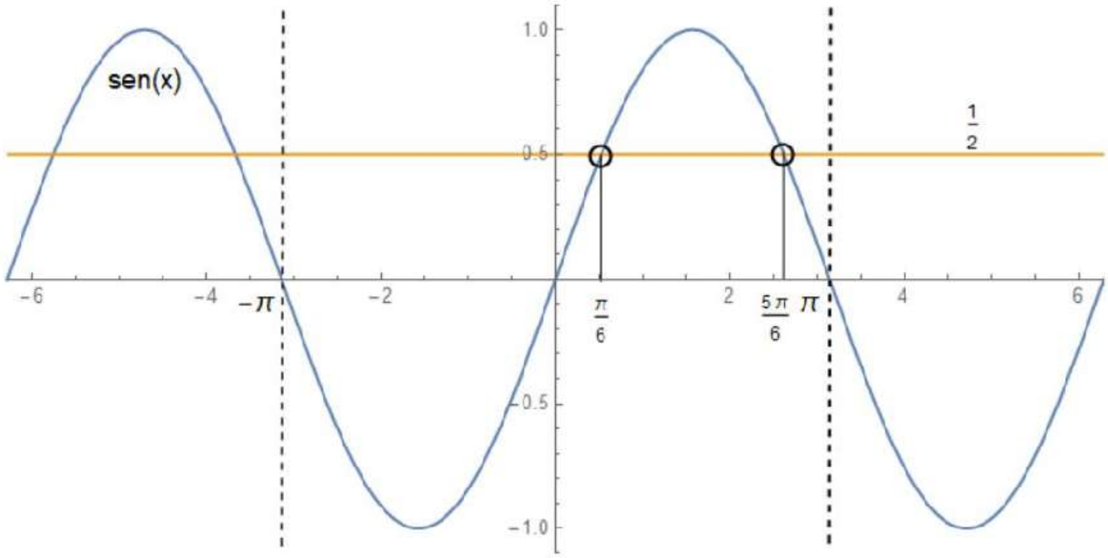
$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{\pi}{6}\right\} \bigcup \left\{\frac{5}{6}\pi\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right\}$$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$

se verifican estas soluciones en $[-\pi, \pi]$

```
Plot[{Sin[x], 1/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 b) **encontrar las soluciones de sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para x ∈ [$-\pi$, π]**

Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

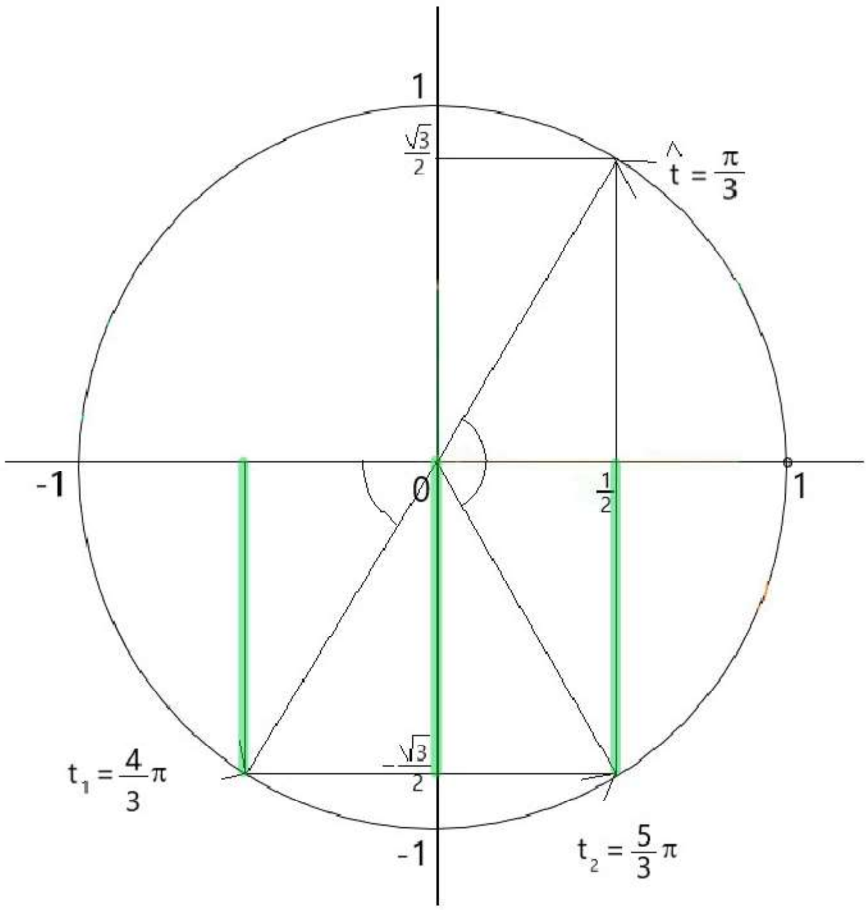
	0º	30º	45º	60º	90º
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco t = $\frac{\pi}{3}$ tiene un valor de sen (t) similar a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

salvo el signo

Justamente, el signo negativo nos está indicando que los x que buscamos

cuyo seno es negativo, pertenecen al 3 er y 4 to cuadrante



De manera similar al Ej 13 a) para $x \in \mathbb{R}$ tendremos dos conjuntos infinitos

de soluciones de la ecuación sen $(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

uno generado por $x = \frac{4}{3}\pi$ y otro generado por $x = \frac{5}{3}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \;, \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación sen $(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \;, \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para x $\in [-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en x = $\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

si k = 0 $\Longrightarrow$ x = $\frac{4}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{4}{3}\pi > \pi$ y no pertenece a $[-\pi, \pi]$

(Nota : si con k = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de k menores que 0)

si k = -1 $\Longrightarrow$ x = $\frac{4}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$ es una de ellas pues $\in [-\pi, \pi]$

si k = -2 $\Longrightarrow$ x = $\frac{4}{3}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 4\pi = -\frac{8}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{8}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{4}{3}\pi$ sólo $-\frac{2}{3}\pi \in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{5}{3}\pi$ pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en x = $\frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi$

si z = 0 $\Longrightarrow$ x = $\frac{5}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi$ que NO es una de ellas pues $\frac{5}{3}\pi > \pi$ y no pertenece a $[-\pi, \pi]$

(Nota : si con z = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de z menores que 0)

si z = -1 $\Longrightarrow$ x = $\frac{5}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ es una de ellas pues $\in [-\pi, \pi]$

si z = -2 $\Longrightarrow$ x = $\frac{5}{3}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi - 4\pi = -\frac{7}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{7}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{5}{3}\pi$ sólo $-\frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$

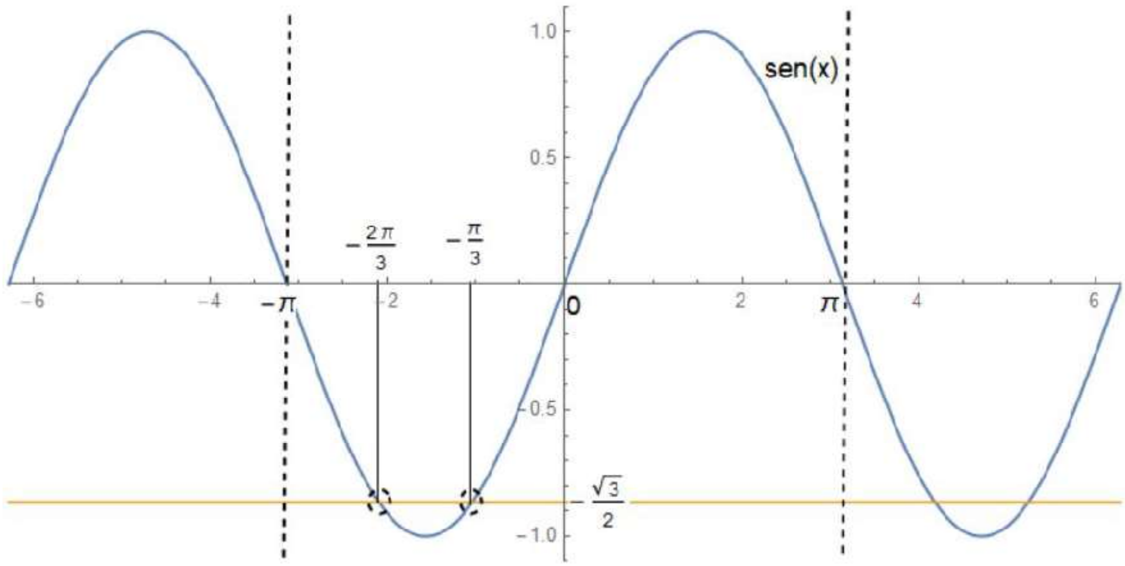
Finalmente las soluciones de sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para x $\in [-\pi, \pi]$ son

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{3}\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}\right\}$$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal y = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], -√3/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 c) encontrar las soluciones de sen (x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ para x ∈ $[-\pi, \pi]$

Este ejercicio es similar al anterior Ej 12 b)

Como el seno es negativo los arcos solución pertenecen al 3 er y 4 to cuadrante

Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

el arco cuyo valor de seno de x en el 1 er cuadrante coincide en valor absoluto es $\frac{\pi}{4}$

Entonces los conjuntos soluciones serán :

uno generado por $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$ y otro generado por $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 :\quad x_1 = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \ ,\ \ k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 :\quad x_2 = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ ,\ \ z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación sen (x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ para x ∈ $\mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \ ,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ ,\ \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de
seno

sen (x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

si k = 0 $\Longrightarrow$ $x = \frac{5}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{5}{4}\pi > \pi$ y no pertenece a $[-\pi, \pi]$

(Nota : si con k = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de k menores que 0)

si k = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{5}{4}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi$ es una de ellas pues $\in [-\pi, \pi]$

si k = -2 $\Longrightarrow$ $x = \frac{5}{4}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi - 4\pi = -\frac{11}{4}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{11}{4}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{5}{4}\pi$ sólo $-\frac{3}{4}\pi \in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{-\frac{3}{4}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{7}{4}\pi$ pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi$

si z = 0 $\Longrightarrow$ $x = \frac{7}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi$ que NO es una de ellas pues $\frac{7}{4}\pi > \pi$ y no pertenece a $[-\pi, \pi]$

(Nota : si con z = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de z menores que 0)

si z = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{7}{4}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$ es una de ellas pues $\in [-\pi, \pi]$

si z = -2 $\Longrightarrow$ $x = \frac{7}{4}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi - 4\pi = -\frac{9}{4}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{9}{4}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $-\frac{\pi}{4}$ sólo $-\frac{\pi}{4} \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$

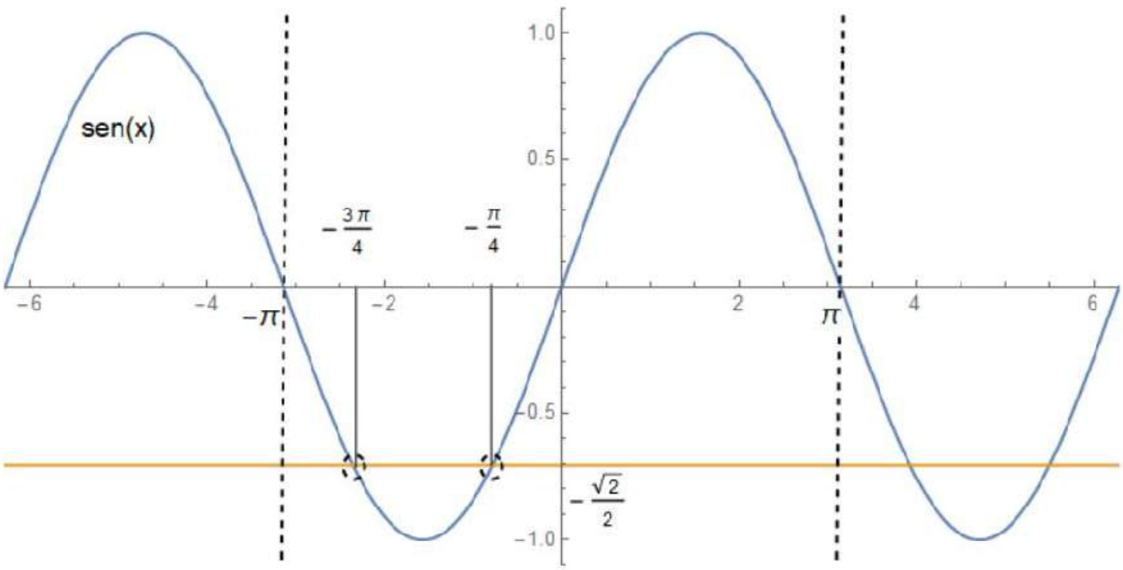
Finalmente las soluciones de sen (x) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$ son

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{-\frac{3}{4}\pi\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{4}\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right\}$$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], -√2/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 f) encontrar las soluciones de $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$

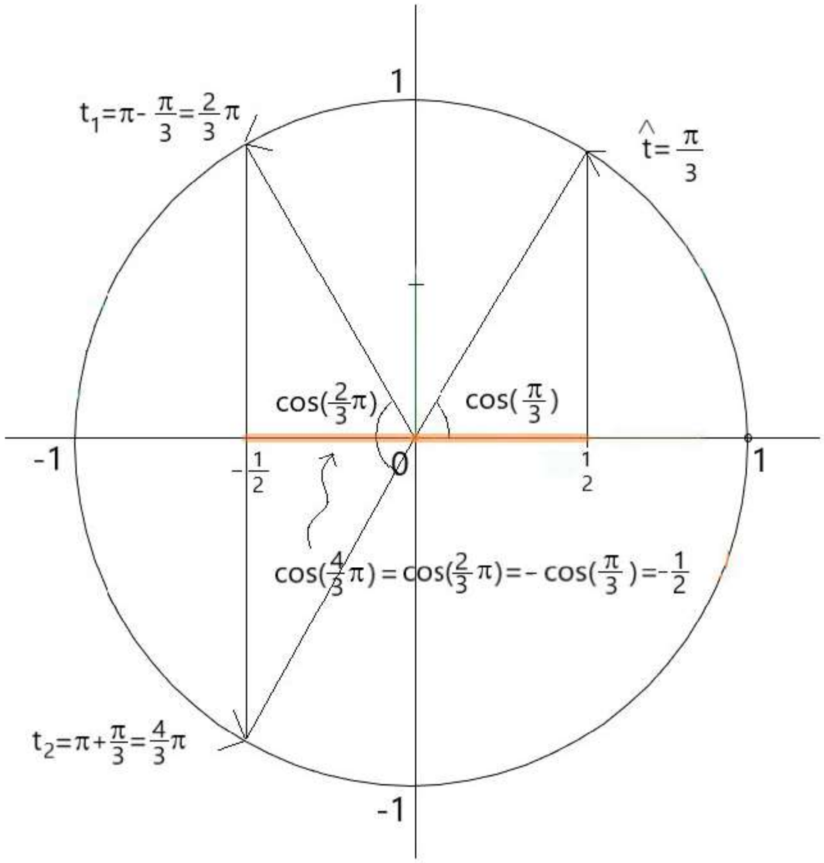
Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco $t = \frac{\pi}{3}$ tiene un valor de cos (t) $\frac{1}{2}$ que es igual

en valor absoluto al que buscamos

Miremos el diagrama de la circunferencia de radio 1



Es decir que para $x \in \mathbb{R}$ tendremos dos conjuntos infinitos

de soluciones de la ecuación $\cos(x) = -\frac{1}{2}$:

uno generado por $x = \frac{2}{3}\pi$ y otro generado por $x = \frac{4}{3}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi , \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

si k = 0 $\Longrightarrow$ $x = \frac{2}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$ es una de ellas pues $\frac{2}{3}\pi \in [-\pi, \pi]$

si k = 1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{2}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{8}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{8}{3}\pi > \pi$

si k = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{2}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{4}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{2}{3}\pi$ tenemos $\frac{2}{3}\pi$ que $\in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{\frac{2}{3}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{4}{3}\pi$ pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi$

si z = 0 $\Longrightarrow$ $x = \frac{4}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$ que NO es una de ellas pues $\frac{4}{3}\pi > \pi$

(Nota : si con z = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de z menores que 0)

si z = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{4}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$ que es una de ellas pues $-\frac{2}{3}\pi \in [-\pi, \pi]$

si z = -2 $\Longrightarrow$ $x = \frac{4}{3}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 4\pi = -\frac{8}{3}\pi$ que NO es una de ellas pues $-\frac{8}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{4}{3}\pi$ es sólo $-\frac{2}{3}\pi \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$ son

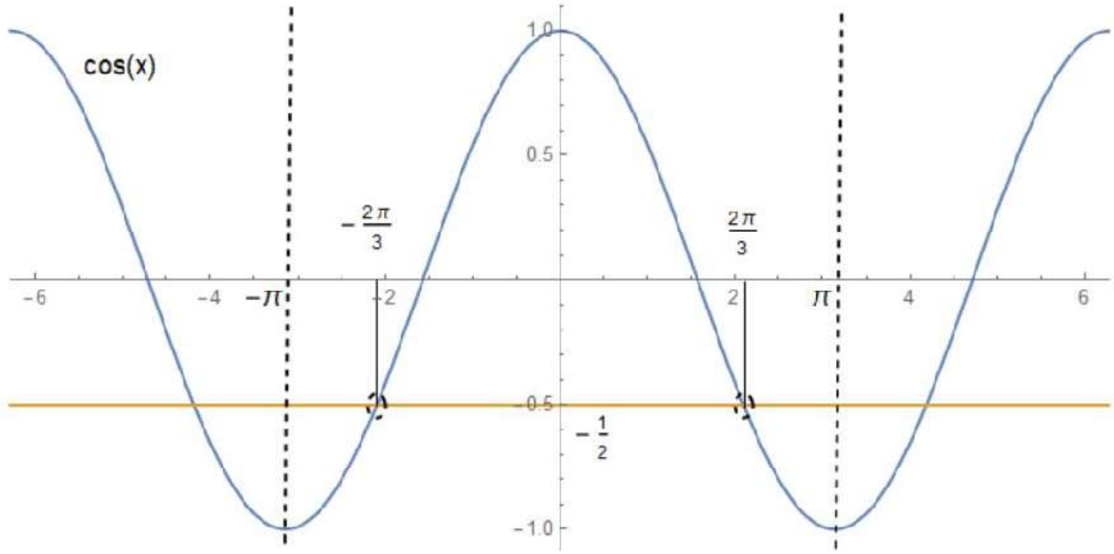
$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{2}{3}\pi\right\} \bigcup \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$$

Si graficamos cos (x) y la recta horizontal $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Cos[x], -1/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 h) **encontrar las soluciones de** $\cos(x) = 1$ **para** $x \in [-\pi, \pi]$

Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0^{o}	30^{o}	45^{o}	60^{o}	90^{o}
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco $t = 0\,\pi = 0$ **tiene un valor de** $\cos(t)$ **igual a** 1

Entonces el conjunto solución será :

S : $x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = 0 \cdot 2\pi = 0\,\pi$ **es una de ellas pues** $0\,\pi \in [-\pi, \pi]$

si $k = 1 \implies x = 1 \cdot 2\pi = 2\pi$ **NO es una de ellas pues** $2\pi > \pi$

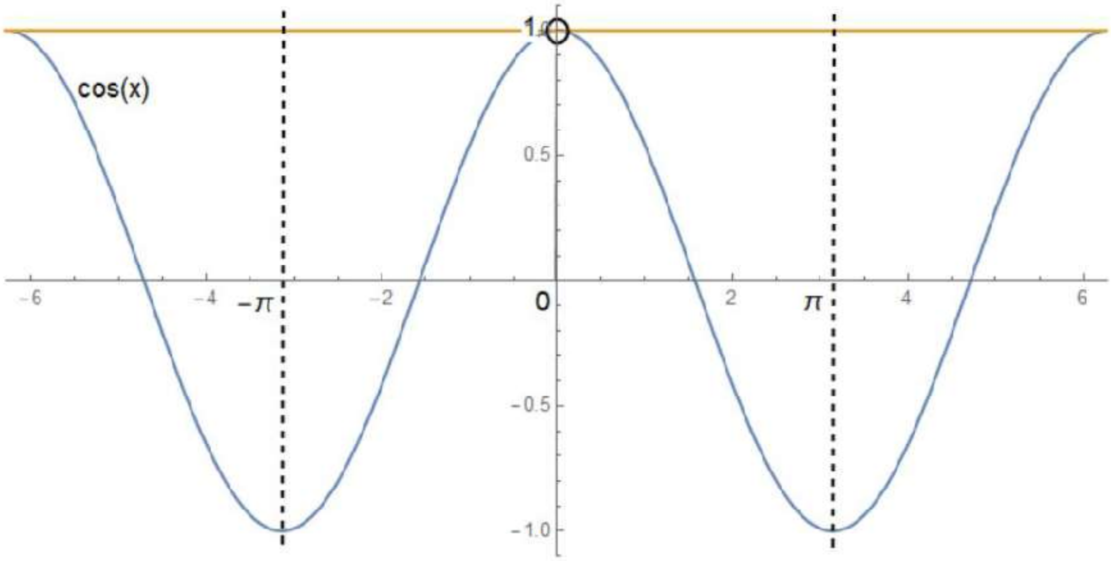
si $k = -1 \implies x = (-1) \cdot 2\pi = -2\pi$ **NO es una de ellas pues** $-2\pi < -\pi$

Entonces

$S = \{0\}$ es el conjunto solución de $\cos(x) = 1$ para $x \in [-\pi, \pi]$

Si graficamos sen (x) **y la recta horizontal** $y = -1$ **se verifica esta solución**

```
Plot[{Cos[x], 1}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto
```



Ejercicio 15.- Encontrar todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que

a. $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$ **b.** $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\cos(x) = -1$

Ej 15 a) **Las soluciones de** $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$ **pertenecen a todo** $\mathbb{R}$

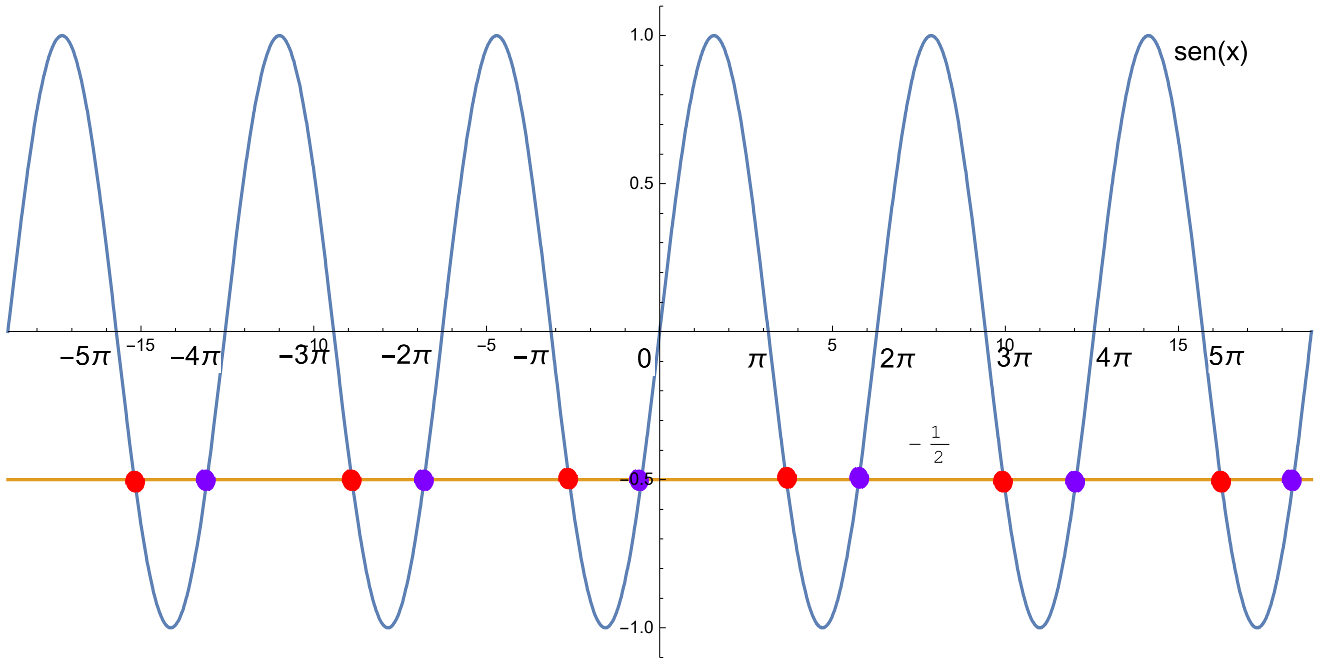
Ya resuelto en el Ej 14 a)

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi,\ \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

S es el conjunto solución de $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}\quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = -\dfrac{1}{2}$ **se ven estas soluciones**

```
Plot[{Sin[x], -1/2}, {x, -6 π, 6 π}, PlotRange → {{-6 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 15 c) **Las soluciones de** $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **pertenecen a todo** $\mathbb{R}$

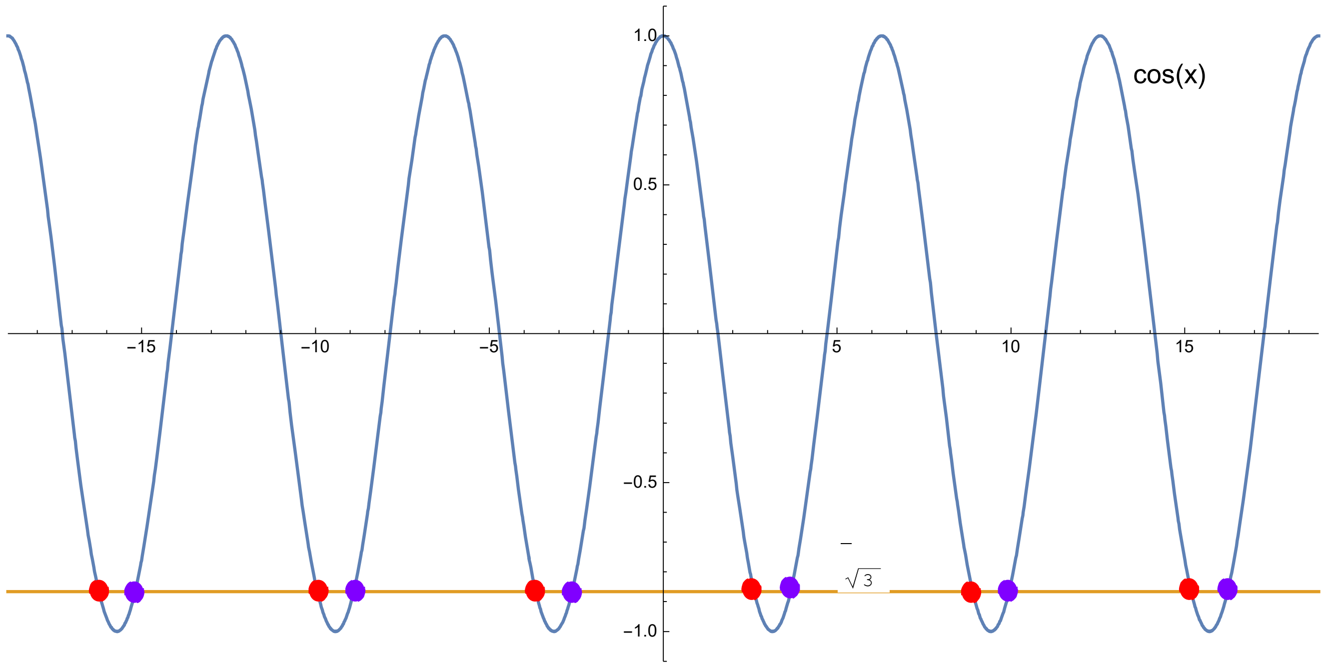
Ya resuelto en el Ej 14 c)

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + z \cdot 2\pi ,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

S es el conjunto solución de $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si graficamos $\cos(x)$ **y la recta horizontal** $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **se ven estas soluciones**

```
Plot[{Cos[x], -√3/2}, {x, -6 π, 6 π}, PlotRange → {{-6 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Ejercicio 16.- Resolver.

a. $\operatorname{sen}(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$

b. $\operatorname{sen}(x)+\dfrac{1}{2}=0$ en $[2\pi;5\pi]$

c. $\cos(x)-\dfrac{1}{2}=0$ en $[-\pi;2\pi]$

d. $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en $\left[\dfrac{\pi}{2};3\pi\right]$

Ej 16 b) **Encontrar las soluciones de** $\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{2}=0$ **que pertenecen a** $[2\pi, 5\pi]$

$\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen}(x)=-\frac{1}{2}$

De acuerdo a la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

el arco que tiene el mismo valor en módulo es $\hat{t}=\frac{\pi}{6}$

Como la ecuación nos pide $\operatorname{sen}(x)=-\frac{1}{2}$ **negativo los arcos con seno negativo**

serán del 3 er y 4 to cuadrante, es decir :

$t_1=\pi+\hat{t}=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$ **y**

$t_2=2\pi-\hat{t}=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$

Estos arcos $t_1 = \frac{7}{6}\pi$ y $t_2 = \frac{11}{6}\pi$ son los generadores de los conjuntos infinitos de soluciones en todo $\mathbb{R}$

$x_1 = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi \;,\; z \in \mathbb{Z}$

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \qquad x_1 = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \qquad x_2 = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi \;,\; z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación sen $(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi \;,\; z \in \mathbb{Z}\right\}$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

sen $(x) = -\frac{1}{2}$ **para** $x \in [2\pi, 5\pi]$ **, veamos cuáles soluciones están en** $[2\pi, 5\pi]$ $([360°, 900°])$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

si k =

$0 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi \;(210°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{7}{6}\pi < 2\pi$ **y no pertenece a** $[2\pi, 5\pi]$

si k =

$1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi \;(570°)$ **es una de ellas pues** $\in [2\pi, 5\pi]$ $([360°, 900°])$

si $k = 2 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 2 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + 4\pi = \frac{31}{6}\pi \;(930°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{31}{6}\pi > 5\pi$

si $k = -1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi \;(-150°)$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{5}{6}\pi < 2\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{7}{6}\pi$ tenemos la solución :

$\frac{19}{6}\pi \in [2\pi, 5\pi]$

$S_1 = \left\{\frac{19}{6}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ pertenecen a $[2\pi, 5\pi]$ $([360°, 900°])$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{11}{6}\pi < 2\pi$

si $z = 1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + 2\pi = \frac{23}{6}\pi$ $(690°)$ es una de ellas pues $\in [2\pi, 5\pi]$

si $z = 2 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 2 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + 4\pi = \frac{35}{6}\pi$ $(1050°)$ NO es una de ellas pues $\frac{35}{6}\pi > 5\pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi - 2\pi = -\frac{1}{6}\pi$ $(-30°)$ NO es una de ellas pues $-\frac{1}{6}\pi < 2\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ tenemos la solución :

$\frac{23}{6}\pi \in [2\pi, 5\pi]$

$S_2 = \left\{\frac{23}{6}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de sen $(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [2\pi, 5\pi]$ son

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{19}{6}\pi\right\} \cup \left\{\frac{23}{6}\pi\right\} \implies$

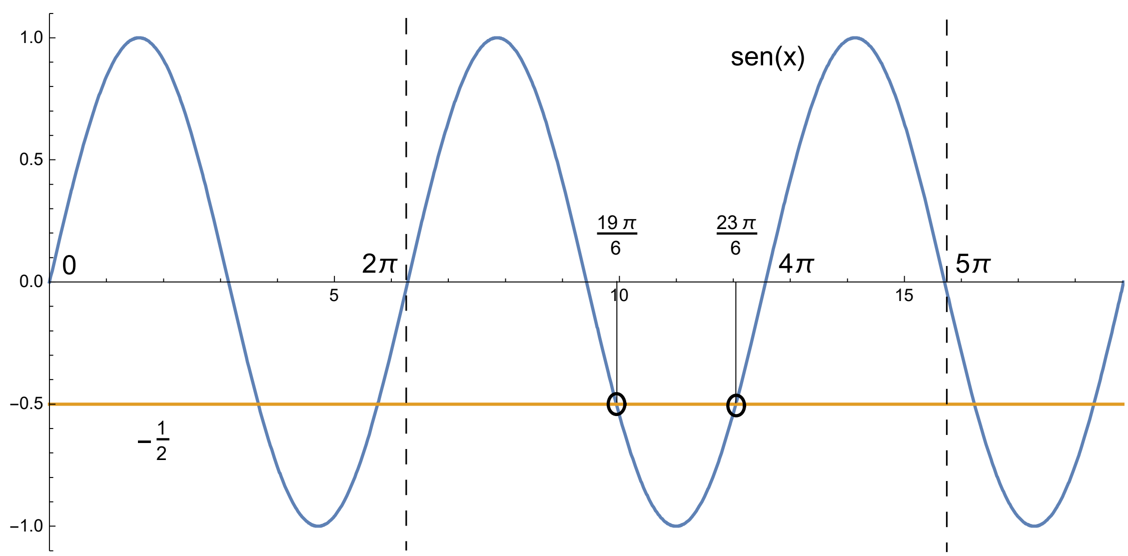
$$S = \left\{\frac{19}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi\right\}$$

S es el conjunto solución de sen $(x) = -\frac{1}{2}$ $\forall x \in [2\pi, 5\pi]$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = -\frac{1}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], -1/2}, {x, 0, 6 π}, PlotRange → {{0, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 16 c) Encontrar las soluciones de $\cos(x) - \frac{1}{2} = 0$ que pertenecen a $[-\pi, 2\pi]$

$\cos(x) - \frac{1}{2} = 0 \implies \cos(x) = \frac{1}{2}$

De acuerdo a la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

el arco que tiene el mismo valor en módulo es $\hat{t} = \frac{\pi}{3}$

Como la ecuación nos pide $\cos(x) = \frac{1}{2}$ positivo los arcos con coseno positivo

serán del 1 er y 4 to cuadrante, es decir :

$t_1 = \hat{t} = \frac{\pi}{3}$ y

$t_2 = 2\pi - \hat{t} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

Estos arcos $t_1 = \frac{\pi}{3}$ y $t_2 = \frac{5}{3}\pi$ son los generadores de los conjuntos infinitos

de soluciones en todo $\mathbb{R}$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , \ z \in \mathbb{Z}$

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , \ z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\cos(x) = \frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , \ z \in \mathbb{Z}\right\}$

Sin embargo, como en el ejercicio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ para $x \in [-\pi, 2\pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, 2\pi]$ $\left(\left[-180°, 360°\right]\right)$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$ $(60°)$ es una de ellas pues $\in [-\pi, 2\pi]$ $\left(\left[-180°, 360°\right]\right)$

si $k = 1 \implies x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$ $(420°)$ NO es una de ellas pues $\frac{7}{3}\pi > 2\pi$

si $k = -1 \implies x = \frac{\pi}{3} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi$ $(-300°)$ NO es una de ellas pues $-\frac{5}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{3}$ tenemos la solución :

$\frac{\pi}{3} \in [-\pi, 2\pi]$

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{5}{3}\pi$ pertenecen a $[-\pi, 2\pi]$ $([-180°, 360°])$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{5}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi$ $(300°)$ es una de ellas pues $\frac{5}{3}\pi \in [-\pi, 2\pi]$

si $z = 1 \implies x = \frac{5}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{11}{3}\pi$ $(660°)$ NO es una de ellas pues $\frac{11}{3}\pi > 2\pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{5}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ $(-60°)$ es una de ellas pues $-\frac{\pi}{3} \in [-\pi, 2\pi]$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ tenemos las soluciones :

$\frac{5}{3}\pi$ y $-\frac{\pi}{3} \in [-\pi, 2\pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ para $x \in [-\pi, 2\pi]$ son

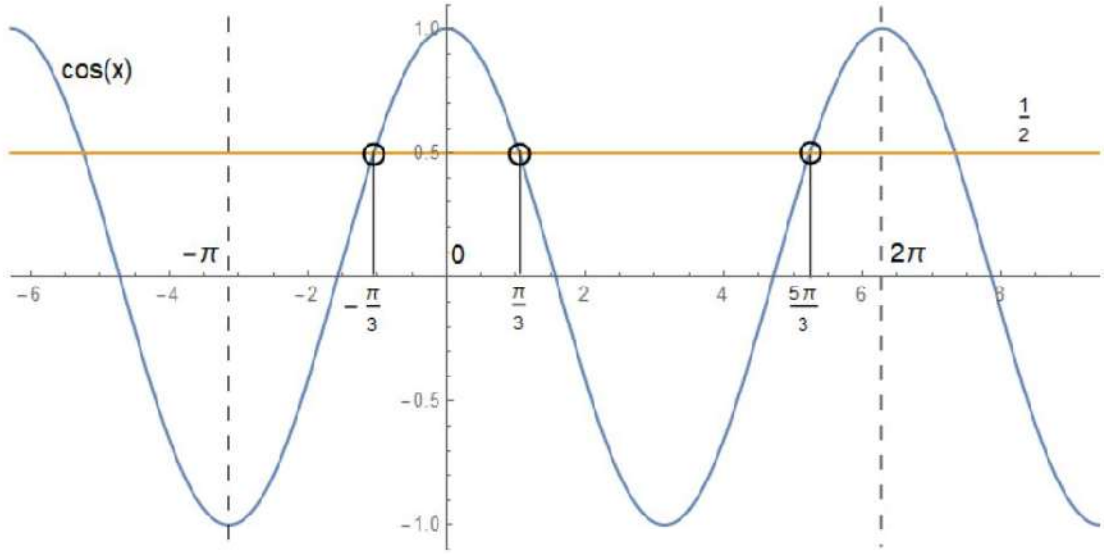
$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\} \implies$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$$

S es el conjunto solución de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in [-\pi, 2\pi]$

Si graficamos cos (x) y la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Cos[x], 1/2}, {x, -2 π, 3 π}, PlotRange → {{-2 π, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Ejercicio 17.- Hallar los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

a. $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en $[-\pi;5\pi]$

b. $f(x)=\operatorname{sen}(2x)+1$ en $[-\pi;5\pi]$

c. $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1$ en $[-\pi;3\pi]$

d. $f(x)=2\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ en $[0;3\pi]$

e. $f(x)=2\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}(x)$ en $[-\pi;\pi]$

f. $f(x)=\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}(x)\right)\cos(x)$ en $[-\pi;\pi]$

Ej 17 a) Hallar C^0, C^+ y C^- de f (x) en los intervalos indicados

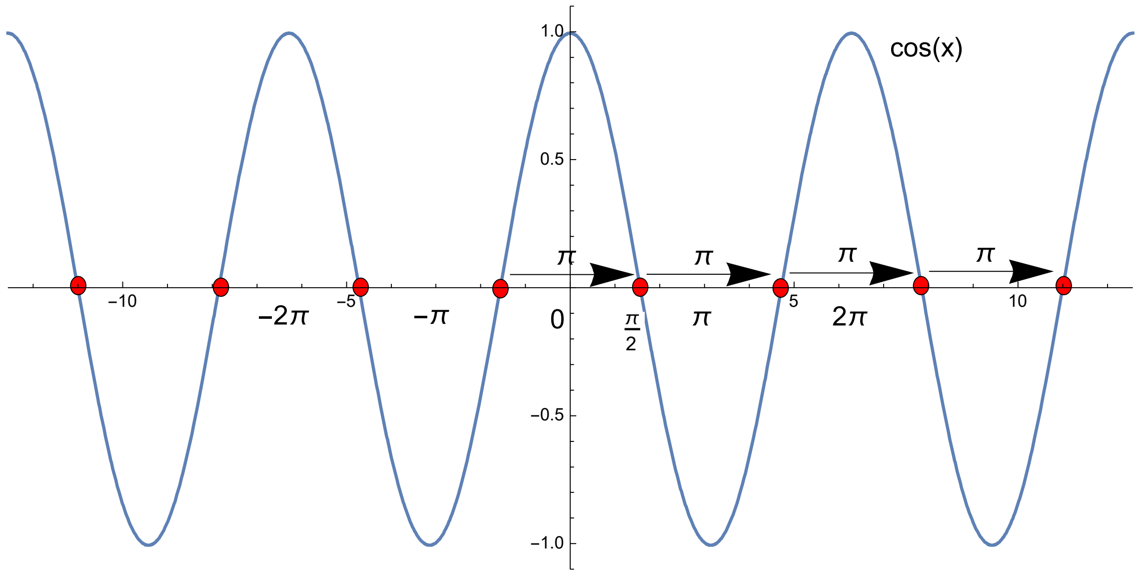
$$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{en} \quad [-\pi, 5\pi]$$

$C^0=\{x\in \mathrm{Dom}(f) : f(x)=0\}$

$f(x)=0 \implies \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

Veamos dónde se dan los ceros del coseno

```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Observemos que los ceros se dan en $\frac{\pi}{2}$ más un múltiplo entero de π, es decir :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pero como tenemos cos $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, los ceros de esta función se darán cuando :

$$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Despejamos x :

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi = \frac{(2-1)\,\pi}{4} + k \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Entonces el conjunto de ceros de cos $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ es :

$$C^0 = \{x \in \mathrm{Dom}\,(f) \; : \; f\,(x) = 0\} = \left\{x \in \mathrm{Dom}\,(f) \; : \; x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Como nos piden sólo los ceros que pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$

iremos tomando valores de k y chequeando que pertenezcan a $[-\pi, 5\pi]$ $\left(\left[-180°, 900°\right]\right)$

Si $k = 0 \implies x_0 = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$ $\left(45°\right)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 1 \implies x_1 = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$ $\left(225°\right)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 2 \implies x_2 = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$ $\left(405°\right)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 3 \implies x_3 = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{13}{4}\pi$ $\left(585°\right)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 4 \implies x_4 = \frac{\pi}{4} + 4 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17}{4}\pi$ $\left(765°\right)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 5 \implies x_5 = \frac{\pi}{4} + 5 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 5\pi = \frac{21}{4}\pi$ $\left(945°\right)$ no $\in [-\pi, 5\pi]$

Ahora con $k < 0$

Si $k = -1 \implies x_{-1} = \frac{\pi}{4} + (-1)\cdot\pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$ $\quad (-135°) \quad$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = -2 \implies x_{-2} = \frac{\pi}{4} + (-2)\cdot\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ $\quad (-315°) \quad$ no $\in [-\pi, 5\pi]$

por lo tanto,

$$C^0 = \{x \in [-\pi, 5\pi] : f(x) = 0\} = \left\{-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi\right\}$$

----

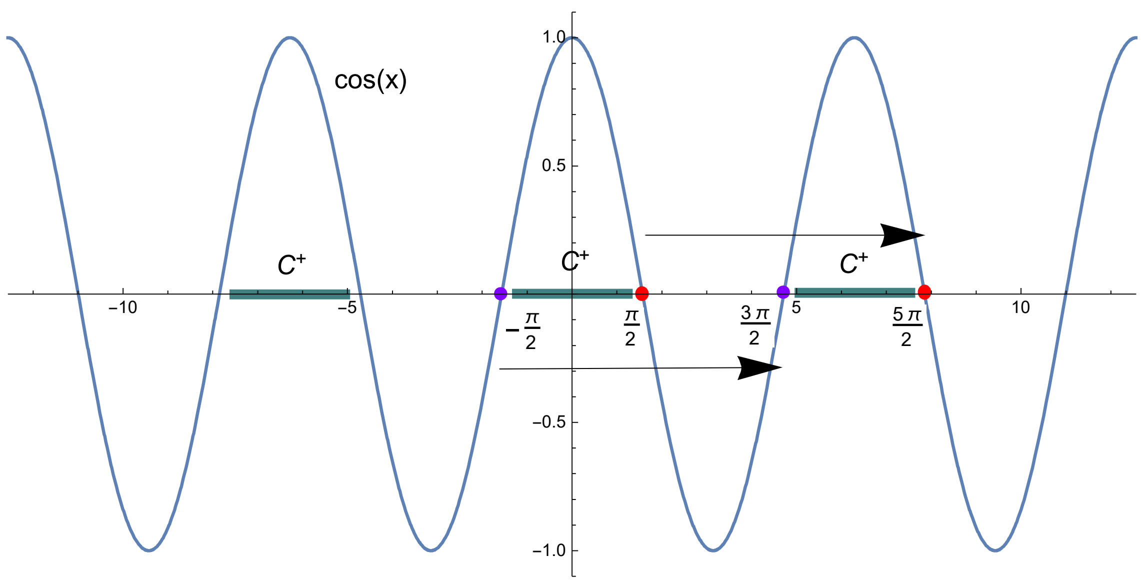
para hallar el C^+ de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[-\pi, 5\pi]$ $\quad ([-180°, 900°])$

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0\}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

Analisis auxiliar : el C^+ del coseno

```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Del gráfico se puede ver que el extremo izquierdo del intervalo de positividad
del

del coseno entre $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se repite en un salto de 2π

Lo mismo le sucede al extremo derecho de dicho intervalo

Entonces $-\frac{\pi}{2}$ genera los extremos izquierdos de los intervalos de positividad

$$x_{izquierdo} = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

mientras que $\frac{\pi}{2}$ genera los extremos derechos de los intervalos de positividad

$$x_{derecho} = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es decir :

C^+ del cos (x) está formado por la unión de los intervalos :

$$C^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)$$

Ahora bien, como en realidad tenemos el coseno desplazado en $\frac{\pi}{4}$ para la izquierda

para $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ los extremos de los intervalos de positividad serán :

(pedimos que lo que está dentro del argumento satisfaga los extremos del coseno, visto antes)

$$\left(x_{izquierdo} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \implies x_{izquierdo} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi = \frac{(-2-1)\pi}{4} + k\cdot 2\pi = -\frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi$$

$$\left(x_{derecho} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \implies x_{derecho} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi = \frac{(2-1)\pi}{4} + k\cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$$

Entonces el C^+ de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ será :

$$C^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi\right)$$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$ $([-180°, 900°])$

$$\text{si } k = 0 \implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 0\cdot 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 0\cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{4}\pi\right) \quad ([-135°, 45°]) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 1 \implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 1\cdot 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 1\cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi + 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 2\pi\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi\right) \quad ([225°, 405°]) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 2 \implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 2\cdot 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 2\cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi + 4\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 4\pi\right) =$$

$$= \left(\frac{13}{4}\pi,\ \frac{17}{4}\pi\right) \quad ([585°, 765°]) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 3 \implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 3\cdot 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 3\cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi + 6\pi,\ \frac{1}{4}\pi + 6\pi\right) =$$

$$= \left(\frac{21}{4}\pi,\ \frac{25}{4}\pi\right) \quad ([945°, 1125°]) \text{ no}$$

Ahora veamos con $k < 0$

$$\text{si } k = -1 \implies \left(-\frac{3}{4}\pi + (-1)\cdot 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + (-1)\cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi - 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi - 2\pi\right) =$$

$$= \left(-\frac{11}{4}\pi,\ -\frac{7}{4}\pi\right) \quad ([-495°, -315°]) \text{ no}$$

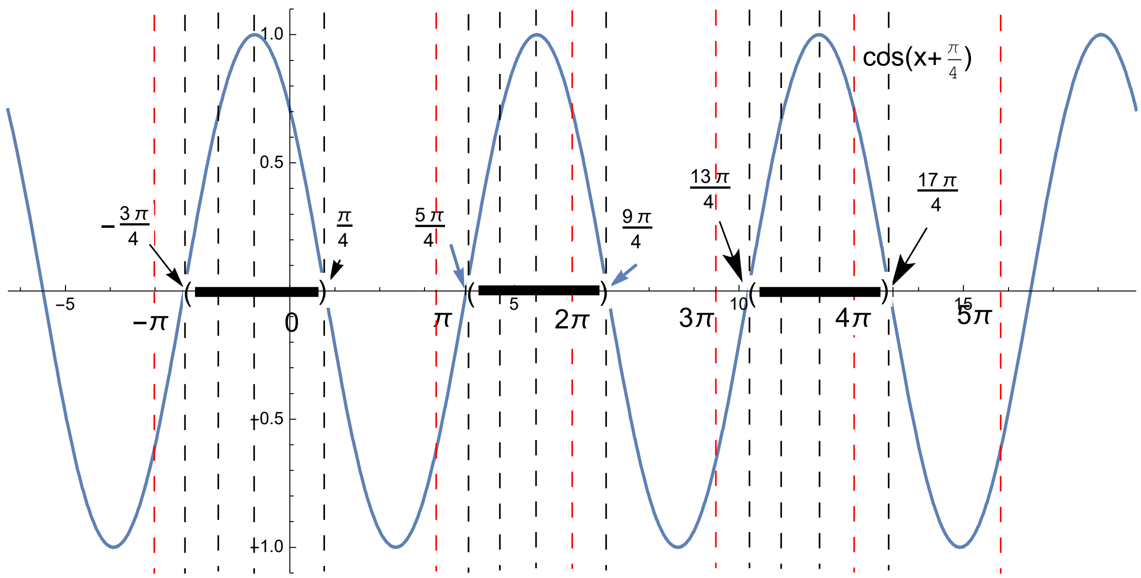
Finalmente el C^+ de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ para $x \in [-\pi, 5\pi]$ es :

$$C^{+} = \left(-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{4}\pi,\ \frac{17}{4}\pi\right)$$

Veamos el gráfico de cos $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{Cos[x + π/4]}, {x, -2 π, 6 π}, PlotRange → {{-2 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



----

para hallar el C^{-} **de cos** $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **en** $[-\pi,\ 5\pi]$ $\quad ([-180°,\ 900°])$

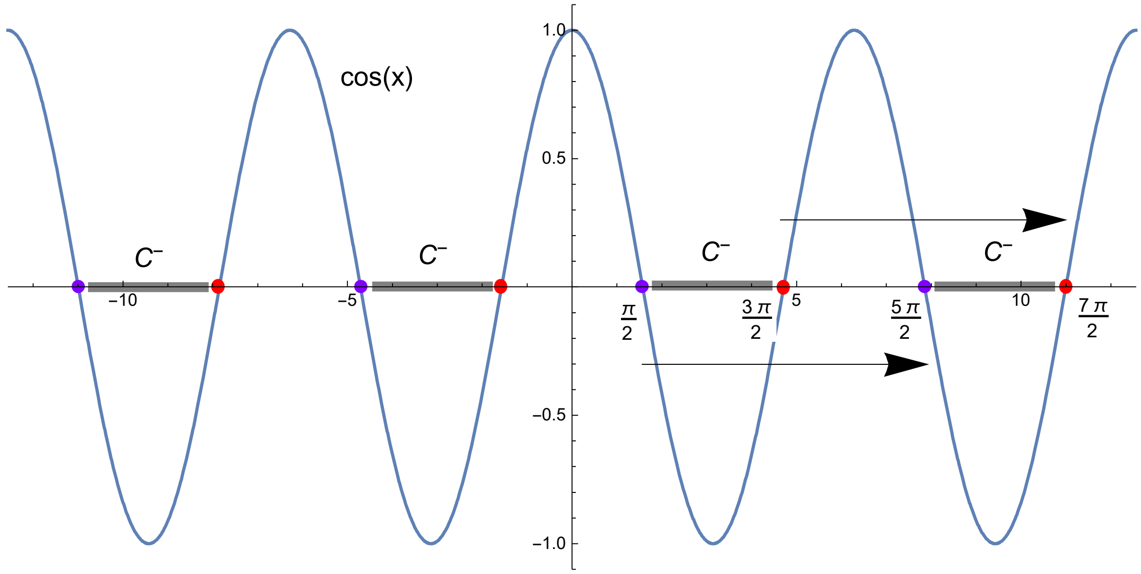
$C^{-} = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0\}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Analisis auxiliar : el C^{-} **del coseno**

```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Del gráfico se puede ver que el extremo izquierdo del intervalo de negatividad

del

del coseno entre $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ **se repite en un salto de** 2π

Lo mismo le sucede al extremo derecho de dicho intervalo

Entonces $\frac{\pi}{2}$ **genera los extremos izquierdos de los intervalos de negatividad**

$$x_{izquierdo} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

mientras que $\frac{3}{2}\pi$ **genera los extremos derechos de los intervalos de negatividad**

$$x_{derecho} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es decir :

C^- del cos (x) está formado por la unión de los intervalos :

$$C^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

Ahora bien, como en realidad tenemos el coseno desplazado en $\frac{\pi}{4}$ **para la izquierda**

para cos $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **los extremos de los intervalos de negatividad serán :**

(pedimos que lo que está dentro del argumento satisfaga los extremos del coseno, visto antes)

$$\left(x_{izquierdo} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x_{izquierdo} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad = \frac{(2-1)\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\left(x_{derecho} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x_{derecho} = \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{(6-1)\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

Entonces el C^- de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ será :

$$C^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + k\cdot 2\pi\right)$$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$ $([-180°, 900°])$

si $k = 0 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 0\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 0\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right)$ $(45°, 225°)$ sí

si $k = 1 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 1\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 1\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2\pi\right) =$

$= \left(\frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi\right)$ $([405°, 585°])$ sí

si $k = 2 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 2\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 4\pi\right) =$

$= \left(\frac{17}{4}\pi,\ \frac{21}{4}\pi\right)$ $([765°, 945°])$ sí, pero una parte $\left(\frac{17}{4}\pi,\ 5\pi\right]$ porque $\frac{21}{4}\pi > 5\pi$

si $k = 3 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 3\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 3\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} + 6\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 6\pi\right) =$

$= \left(\frac{25}{4}\pi,\ \frac{29}{4}\pi\right)$ $([1125°, 1305°])$ no

Ahora veamos con $k < 0$

si $k = -1 \implies \left(\frac{\pi}{4} + (-1)\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + (-1)\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} - 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi - 2\pi\right) =$

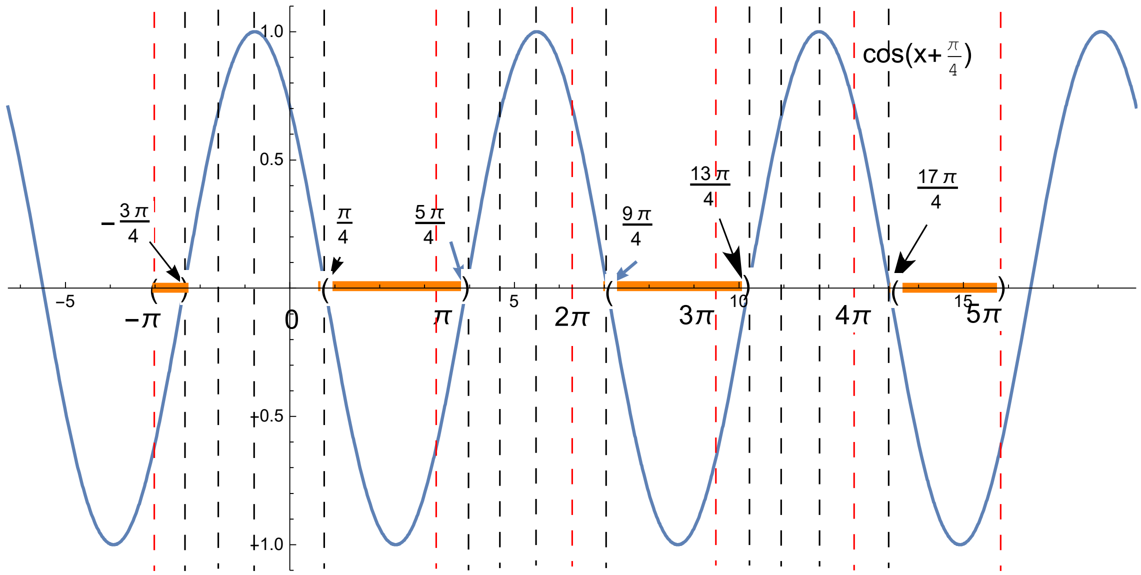
$= \left(-\frac{7}{4}\pi,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$ $([-315°, -135°])$ sí, pero una parte $\left(-\pi,\ -\frac{3}{4}\pi\right]$ porque $-\frac{7}{4}\pi < -\pi$

Finalmente el C^- de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ para $x \in [-\pi, 5\pi]$ es :

$$C^- = \left(-\pi,\ -\frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{17}{4}\pi,\ 5\pi\right)$$

Veamos el gráfico de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{Cos[x + π/4]}, {x, -2 π, 6 π}, PlotRange → {{-2 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre⋯ coseno rango de representación cociente de aspecto



Conclusión :

Para obtener el C^0, C^+, C^- de cualquier función del tipo sen $(\mathcal{H})$ ó de cos $(\mathcal{H})$

del tipo sen $(\mathcal{H})$ ó del tipo cos $(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H} = \pm ax \pm b$

teniendo calculados el C^0, C^+, C^- de sen (x) ó de cos (x)

reemplazamos los x por $\pm ax \pm b$ y despejamos x

y alli salen el C^0, C^+, C^- de sen $(\mathcal{H})$ ó de cos $(\mathcal{H})$

MACHETE PARA ESTUDIAR :)

$$C^0 \text{ del sen } (x) = \{x \in \mathbb{R} : x = k \cdot \pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$C^+ \text{ del sen } (x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \ (2k+1)\pi)$$

$$C^- \text{ del sen } (x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((2k+1)\pi, \ (2k+2)\pi)$$

$$\text{Máximos del sen } (x) = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{Mínimos del sen } (x) = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

--------------------000-------- -----------

$$C^0 \text{ del cos } (x) = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$C^+ \text{ del cos } (x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi, \ \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

$$C^{-} \text{ del } \cos(x) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right)$$

Máximos del cos (x)) = $\{x \in \mathbb{R} : x = k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

Mínimos del cos (x)) = $\{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

Ej 17 c) **Hallar C^0, C^+ y C^- de f (x) en los intervalos indicados**

$$f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 \quad \text{en} \quad [-\pi, 3\pi]$$

+-+

Nota : $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1 = 2\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)-1$ **es una composición de funciones así :**

.- compresión de cos (x) a la mitad (el período se reduce a π) $\cos(x) \longrightarrow \cos(2x)$

.- luego una traslación en $\frac{\pi}{4}$ a la derecha según las x $\cos(2x) \longrightarrow \cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

.- una dilatación al doble según las y (la amplitud de la onda se duplica)

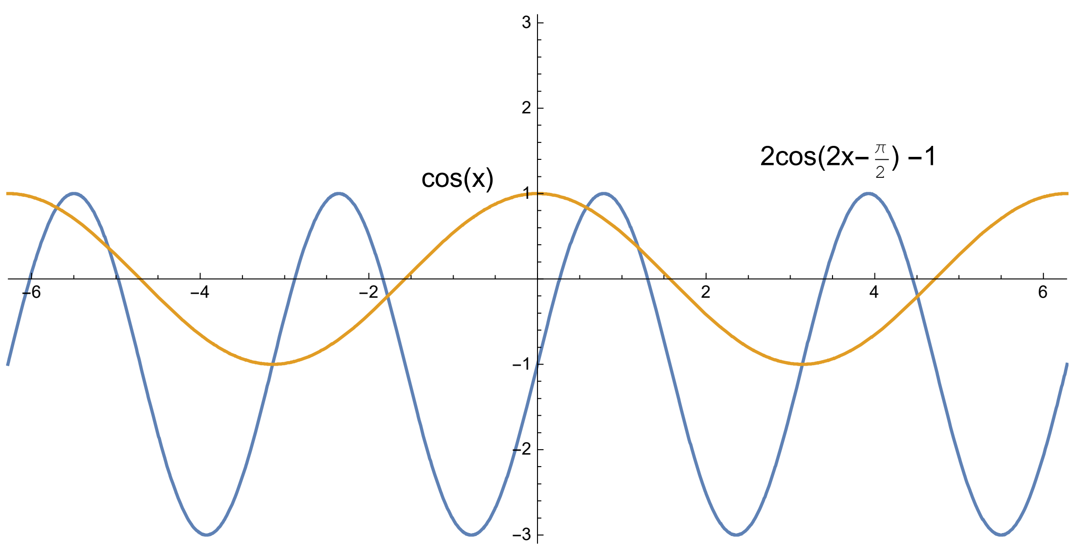
$$\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) \longrightarrow 2\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

.- finalmente una traslación según las y hacia abajo en 1 unidad

$$2\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) \longrightarrow 2\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)-1$$

+-+

```
Plot[{2 Cos[2 x - π/2] - 1, Cos[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-3.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen·· coseno coseno
rango de representación cociente de aspecto



$C^0 = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

$f(x) = 0 \implies 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \implies 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \implies \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Esto quiere decir que encomtrar los ceros de la $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **se reduce**

a encontrar los x que satisfacen la ecuación $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

En este caso hacemos las sustitución $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ **, entonces resolveremos**

$\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ **para despues reemplazar** $\mathcal{H}$ **y despejar x**

De acuerdo al signo positivo del coseno, $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ **se cumple para**

$\mathcal{H} = \frac{\pi}{3}$ **en el 1 er cuadrante como para** $\mathcal{H} = \frac{5}{3}\pi$ **en el 4 to cuadrante**

El primer conjunto de soluciones es :

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

El segundo conjunto de soluciones es :

$$\mathcal{H} = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$$

Ahora reemplazamos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ **para despejar x :**

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \implies 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{(3+2)\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi}{2} \implies x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

Entonces :

$S_1 : \; x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

Ahora reemplazmos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ **para despejar x en el otro conjunto de soluciones :**

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \implies 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(3+10)\pi}{6} + z \cdot 2\pi = \frac{13}{6}\pi + z \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{\frac{13}{6}\pi + z \cdot 2\pi}{2} \implies x = \frac{13}{12}\pi + z \cdot \pi$$

Entonces :

$S_2 : \; x = \frac{13}{12}\pi + z \cdot \pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto el C^0 **de** $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **en todo** $\mathbb{R}$ **es :**

$C^0 = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{13}{12}\pi + z \cdot \pi,\ \ z \in \mathbb{Z}\right\}$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ $\left(\left[-180°, 540°\right]\right)$ $-\frac{12}{12}\pi = -\pi$; $\frac{36}{12}\pi = 3\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{5}{12}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi$ **sí**

si $k = 1 \implies x = \frac{5}{12}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi + \pi = \frac{17}{12}\pi$ **sí**

si $k = 2 \implies x = \frac{5}{12}\pi + 2 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi + 2\pi = \frac{29}{12}\pi$ **sí**

si $k = 3 \implies x = \frac{5}{12}\pi + 3 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi + 3\pi = \frac{41}{12}\pi$ **no**

Ahora para $k < 0$

si $k = -1 \implies x = \frac{5}{12}\pi + (-1) \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi - \pi = -\frac{7}{12}\pi$ **sí**

si $k = -2 \implies x = \frac{5}{12}\pi + (-2) \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi - 2\pi = -\frac{19}{12}\pi$ **no** $\in [-\pi, 3\pi]$

Entonces :

del primer conjunto de soluciones las que pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ **son :**

$-\frac{7}{12}\pi,\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi,\ \frac{29}{12}\pi$

Veamos cuáles de las soluciones del segundo conjunto

pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ $\left(\left[-180°, 540°\right]\right)$ $-\frac{12}{12}\pi = -\pi$;

$\frac{36}{12}\pi = 3\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{13}{12}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi$ **sí**

si $z = 1 \implies x = \frac{13}{12}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi + \pi = \frac{25}{12}\pi$ **sí**

si $z = 2 \implies x = \frac{13}{12}\pi + 2 \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi + 2\pi = \frac{37}{12}\pi$ **no**

Ahora para $z < 0$

si $z = -1 \implies x = \frac{13}{12}\pi + (-1) \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi - \pi = \frac{\pi}{12}$ **sí**

si $z = -2 \implies x = \frac{13}{12}\pi + (-2) \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi - 2\pi = -\frac{11}{12}\pi$ **sí**

si $z = -3 \implies x = \frac{13}{12}\pi + (-3) \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi - 3\pi = -\frac{23}{12}\pi$ **no** $\in [-\pi, 3\pi]$

Entonces :

del segundo conjunto de soluciones las que pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ **son :**

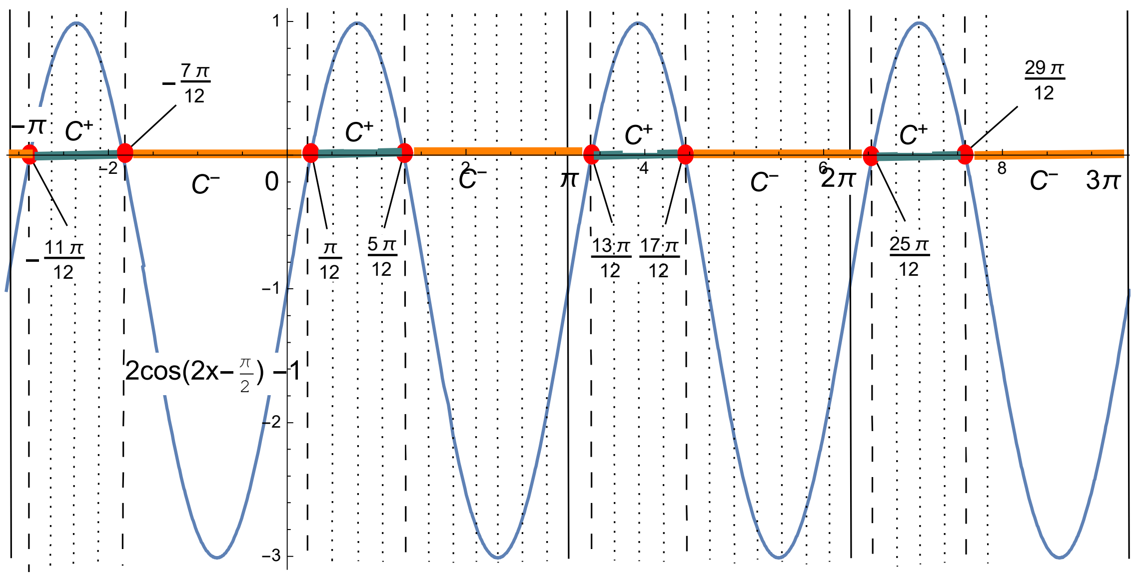
$-\frac{11}{12}\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{13}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi$

Por lo tanto el C^0 de $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi, 3\pi]$ es :

$C^0 = \left\{-\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right\}$

Veamos el gráfico de $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

```
Plot[{2 Cos[2 x - π/2] - 1}, {x, -π, 3 π}, PlotRange → {{-π, 3 π}, {-3.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
representación · coseno · rango de representación · cociente de aspecto



Calculemos el C^+ y el C^- de $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi, 3\pi]$

$C^+ = \{x \in Dom(f) : f(x) > 0\}$

$f(x) > 0 \implies 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 > 0$

$C^- = \{x \in Dom(f) : f(x) < 0\}$

$f(x) < 0 \implies 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 < 0$

Como $f(x) = \cos(x)$ es continua como también $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

usaremos el corolario del Teo de Bolzano para afirmar que entre dos ceros consecutivos

o bien $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$ en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[-\pi, 3\pi]$:

$C^0 = \left\{-\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right\}$

Entonces los intervalos de evaluación de $f(x)$ entre raíces serán :

$\left[-\pi, -\frac{11}{12}\pi\right)$; $\left(-\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi\right)$; $\left(-\frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right)$; $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right)$;
$\left(\frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{25}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{29}{12}\pi, 3\pi\right]$

	$[-\pi, -\frac{11\pi}{12})$	$(-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12})$	$(-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$	$(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$	$(\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12})$	$(\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12})$	$(\frac{17\pi}{12}, \frac{25\pi}{12})$	$(\frac{25\pi}{12}, \frac{29\pi}{12})$	$(\frac{29\pi}{12}, 3\pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$-\frac{23\pi}{24}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{65\pi}{24}$
f(x)	-0.482362	1	-3	1	-3	1	-3	1	-2.93185
f(x) es	-	+	-	+	-	+	-	+	-

Entonces C^+ y C^- de $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi, 3\pi]$, son :

$$C^+ = \left(-\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{25}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right)$$

y

$$C^- = \left[-\pi, -\frac{11}{12}\pi\right) \cup \left(-\frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{29}{12}\pi, 3\pi\right]$$

+-+

Imagen, Amplitud y Período

Observemos el gráfico de sen (x) y el de cos (x)

Vemos que el conjunto Imagen de seno y coseno es el intervalo [-1, 1]

Imagen (sen (x)) = [-1, 1]

Imagen (cos (x)) = [-1, 1]

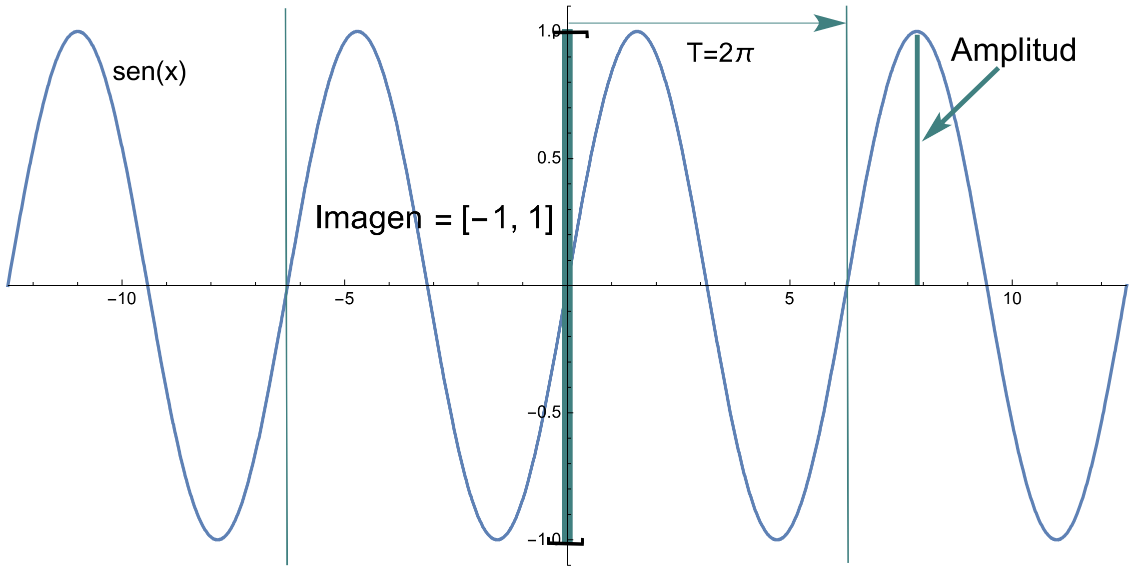
Y que cada 2π el gráfico se repite : esto se llama período T

que no es otra cosa que decir que cada vuelta de 2π los valores de seno y coseno vuelven a dar lo mismo.

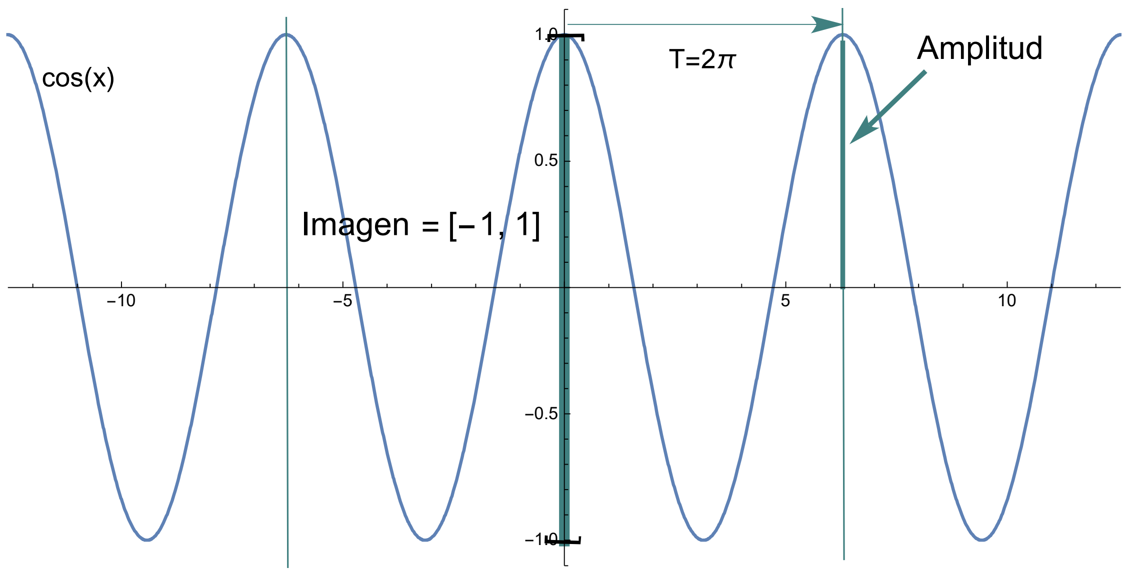
Se dice que tanto sen (x) como cos (x) tienen período 2π

+-+

```
Plot[{Sin[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto




```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



+-+

En un sentido más amplio consideremos la función $f(x) = A \cdot \text{sen}(bx)$ (Idem para coseno)

El factor $|A|$ se llama Amplitud de la onda y el factor $|b|$, dentro del argumento del seno está relacionado al período T mediante la siguiente expresión :

$$|b| = \frac{2\pi}{T} \qquad (*)$$

$$|A| = \text{Amplitud} \qquad (**)$$

Es decir que la fórmula de la función sinusoidal o cosinusoidal nos da información sobre la Amplitud y el período de la misma

Ejemplo 1 : Sea $f(x) = 2\,\text{sen}(x) = 2\,\text{sen}(1 \cdot x)$

como $b = 1$ aplicando (*)

$$|1| = 1 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

f (x) = 2 sen (x) tiene período T = 2 π

Como A = 2, y |A| = Amplitud, tiene Amplitud 2

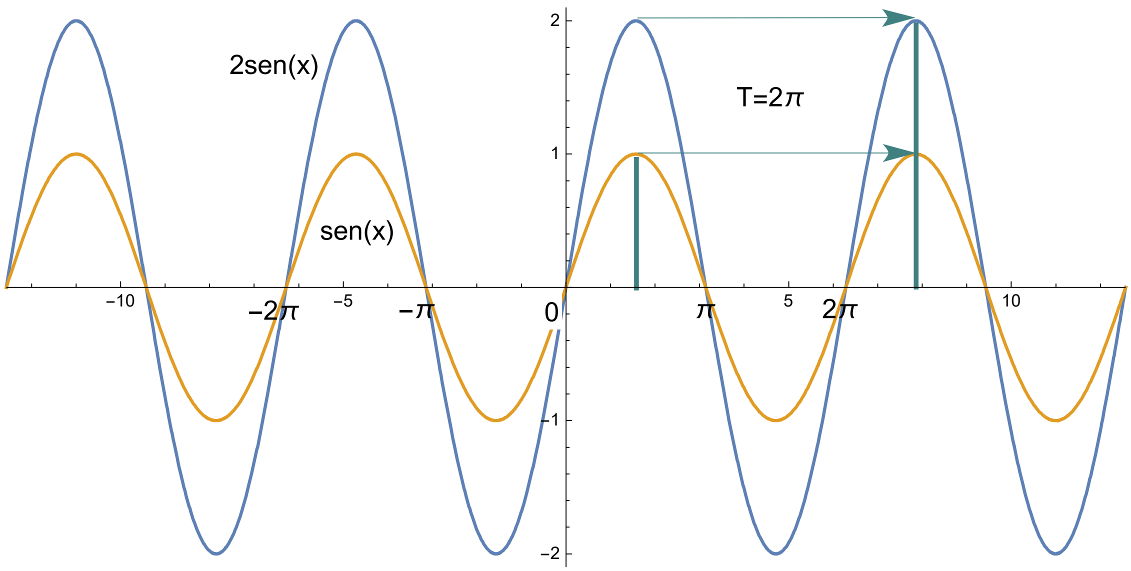
(el factor A comprime o dilata el conjunto Imagen (las "y") de acuerdo a si

0 < |A| < 1 ó |A| > 1 respectivamente, según las "y")

Como Amplitud es 2, el conjunto Imagen de f (x) = 2 sen (x) es [-2, 2]

+-+

```
Plot[{2 Sin[x], Sin[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen··· seno seno rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ejemplo 2 : $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

como $b = \frac{1}{2}$ **aplicando (*)**

$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{T} \quad \Longrightarrow \quad T = 4\pi$

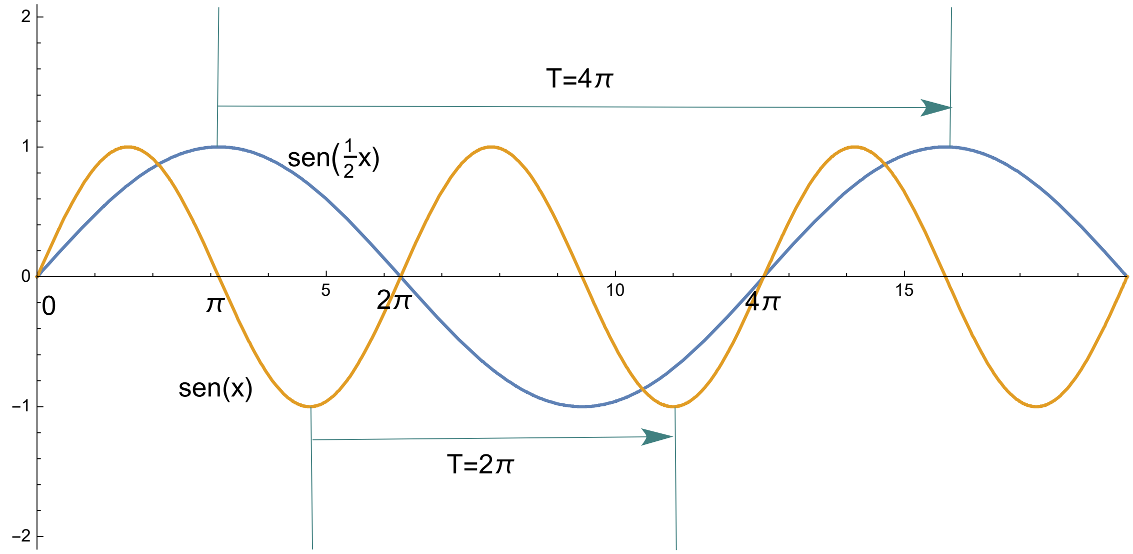
$f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **tiene período T = 4 π (se dilató según las x)**

Como A = 1, y |A| = Amplitud, tiene Amplitud 1

Como Amplitud es 1, el conjunto Imagen de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **es [-1, 1]**

+-+

```
Plot[{Sin[1/2 x], Sin[x]}, {x, 0, 6 π}, PlotRange → {{0, 6 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno seno rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ejemplo 3 : $f(x) = -\frac{1}{3}\,\text{sen}(-4x)$

como b = -4 aplicando (*)

$|-4| = 4 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{3}\,\text{sen}(-4x)$ tiene período $T = \frac{\pi}{2}$ (se comprimió según las "x" y rotó)

Como $A = -\frac{1}{3}$, y $|A|$ = Amplitud, tiene Amplitud $\frac{1}{3}$ (se comprimió según las "y" y rotó)

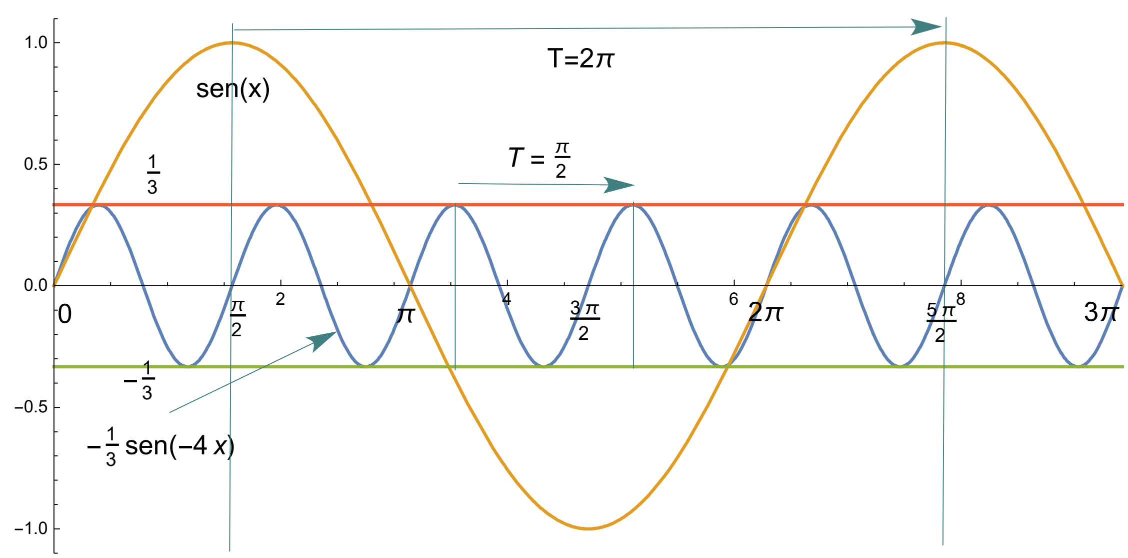
Como Amplitud es $\frac{1}{3}$, el conjunto Imagen de $f(x) = -\frac{1}{3}\,\text{sen}(-4x)$ es $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

+-+

```
Plot[{-1/3 Sin[-4 x], Sin[x], -1/3, 1/3}, {x, 0, 3 π},
  PlotRange → {{0, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

representac· seno seno

rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ejercicio 19.- Hallar la amplitud y el período de f.

a. $f(x)=\cos(x+\pi)$ **b.** $f(x)=3\,\mathrm{sen}(2x)$

c. $f(x)=-\mathrm{sen}(3x-\pi)$ **d.** $f(x)=2\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$

Ej 19 a) Sea f (x) = cos (x + π) Hallar A y T

f (x) = 1 · cos (x + π)

Como A = 1 y Amplitud = |A| ⟹

Amplitud = 1

----

f (x) = cos (1 · x + π)

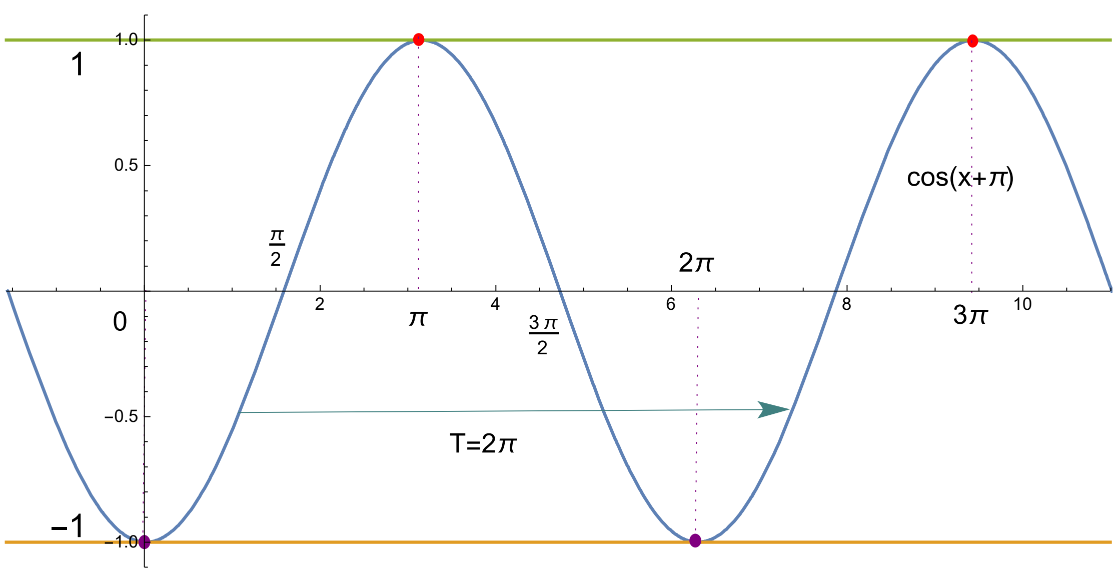
Como b = 1 y $|b| = \frac{2\pi}{T}$ ⟹ $|1| = 1 = \frac{2\pi}{T}$ ⟹ $T = \frac{2}{1}\pi = 2\pi$

Tiene período 2 π

Veamos un gráfico de f (x) = cos (x + π) entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi\right]$

+-+

```
Plot[{Cos[x + π], -1, 1}, {x, -π/2, 7/2 π}, PlotRange → {{-π/2, 7/2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre⋯ coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 19 b) Sea f (x) = 3 sen (2 x) Hallar A y T

f (x) = 3 · cos (2 x)

Como A = 3 y Amplitud = |A| $\Longrightarrow$

Amplitud = 3

----

f (x) = cos $(1 \cdot x + \pi)$

Como b = 2 y $|b| = \frac{2\pi}{T}$ $\Longrightarrow$ $|2| = 2 = \frac{2\pi}{T}$ $\Longrightarrow$ $T = \frac{2}{2}\pi = \pi$

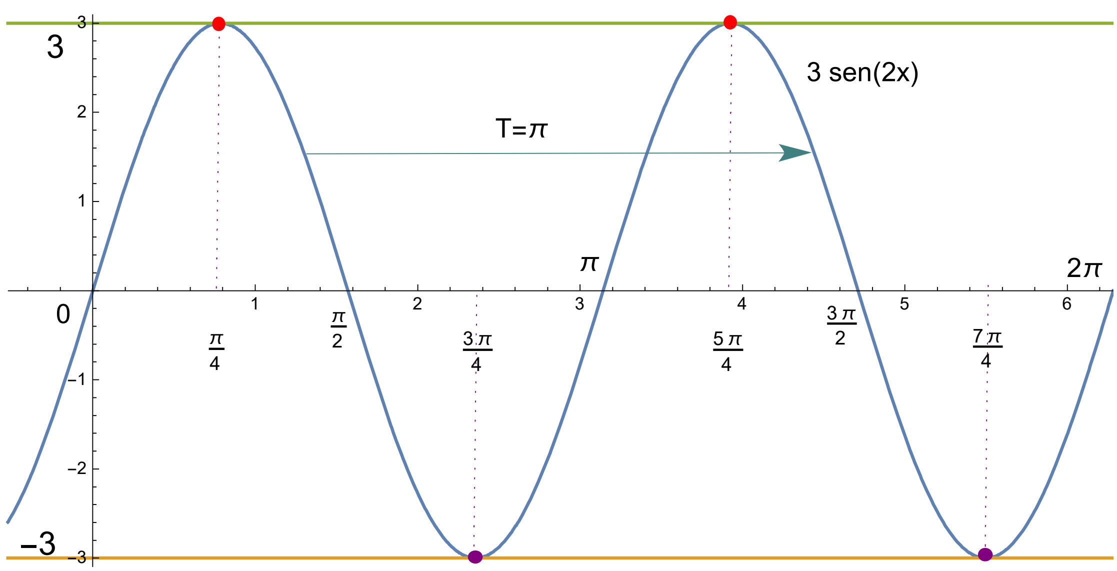
Tiene período π

Veamos un gráfico de f (x) = 3 sen $(2x)$ entre $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$

+-+

Plot$\left[\{3\,\text{Sin}[2\,x], -3, 3\}, \left\{x, -\frac{\pi}{6}, 2\pi\right\}, \text{PlotRange} \to \left\{\left\{-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right\}, \{-3.1, 3.1\}\right\}, \text{AspectRatio} \to 0.5\right]$

represen·· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 19 c) Sea f (x) = - sen $(3x - \pi)$ Hallar A y T

f (x) = $(-1) \cdot$ sen $(3x - \pi)$

Como A = -1 y Amplitud = |A| = |-1| = 1 $\Longrightarrow$

Amplitud = 1

----

f (x) = cos $(1 \cdot x + \pi)$

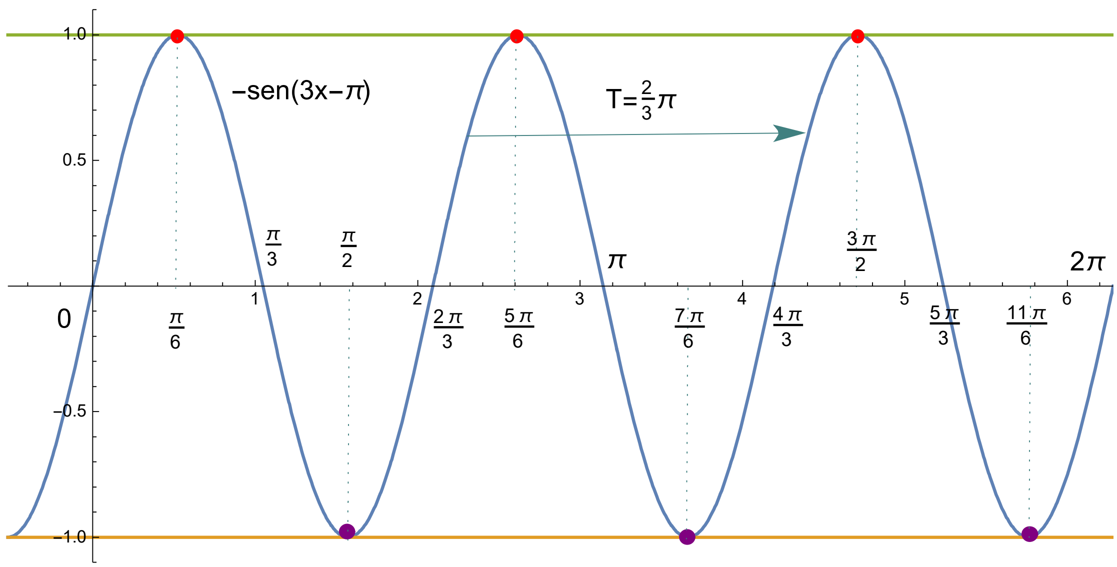
Como b = 3 y $|b| = \frac{2\pi}{T}$ $\Longrightarrow$ $|3| = 3 = \frac{2\pi}{T}$ $\Longrightarrow$ $T = \frac{2}{3}\pi$

Tiene período $\frac{2}{3}\pi$

Veamos un gráfico de $f(x) = -\operatorname{sen}(3x - \pi)$ **entre** $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$

+-

```
Plot[{-Sin[3 x - π], -1, 1}, {x, -π/6, 2 π},
 PlotRange → {{-π/6, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represe··· seno
rango de representación   cociente de aspecto



Ej 19 d) **Sea** $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ **Hallar A y T**

$f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$

Como $A = 2$ **y Amplitud** $= |A| = |2| = 2 \implies$

Amplitud = 2

$f(x) = \cos(1 \cdot x + \pi)$

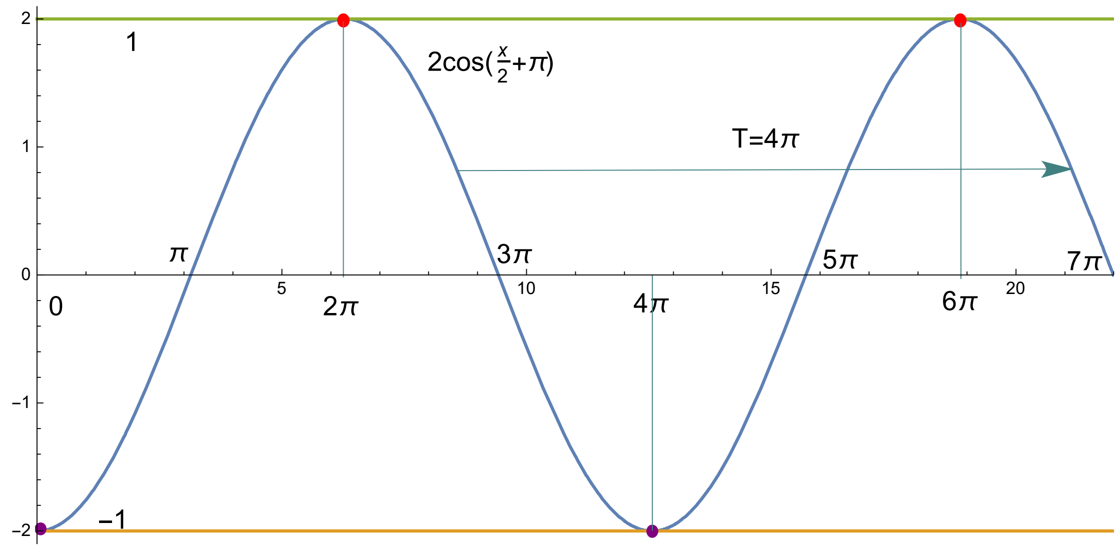
Como $b = \frac{1}{2}$ **y** $|b| = \frac{2\pi}{T} \implies \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{T} \implies T = 4\pi$

Tiene período 4 π

Veamos un gráfico de $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ **entre** $[0, 7\pi]$

+-

```
Plot[{2 Cos[x/2 + π], -2, 2}, {x, 0, 7 π}, PlotRange → {{0, 7 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen·· coseno   rango de representación   cociente de aspecto



++

Ejercicio 21.- Hallar los ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad, los máximos y mínimos y la imagen de f. Hacer un gráfico aproximado.

a. $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[0; 2\pi]$

b. $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ en $[\pi; 2\pi]$

c. $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $[-\pi; \pi]$

d. $f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi; \pi]$

Ej 21 a) Hallar C^0, C^+, C^-, máximos y mínimos e Imagen de f con gráfico aprox.

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **en** $[0, 2\pi]$

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 3\,\text{sen}\left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right]$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Nota : respecto a sen (x) f (x) es una

.- compresión según el eje x a la mitad lo que hace reducir el príodo a $T = \pi$

.- una traslación respecto de las x en $\frac{\pi}{8}$ para la izquierda

.- una dilatación al triple según las y

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Como A = 3 y |A| es la Amplitud ⟹ Amplitud = 3

y como no hay una traslación según el eje de la "y" será

Imagen (f) = [-3, 3]

----

como b = 2 y b se relaciona con el período T a partir de $|b| = \frac{2\pi}{T}$

tenemos $|2| = 2 = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Período de f (x) es T = π

Calculemos el C^0

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

planteamos f (x) = 0

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Longrightarrow \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{0}{3} = 0 \Longrightarrow$

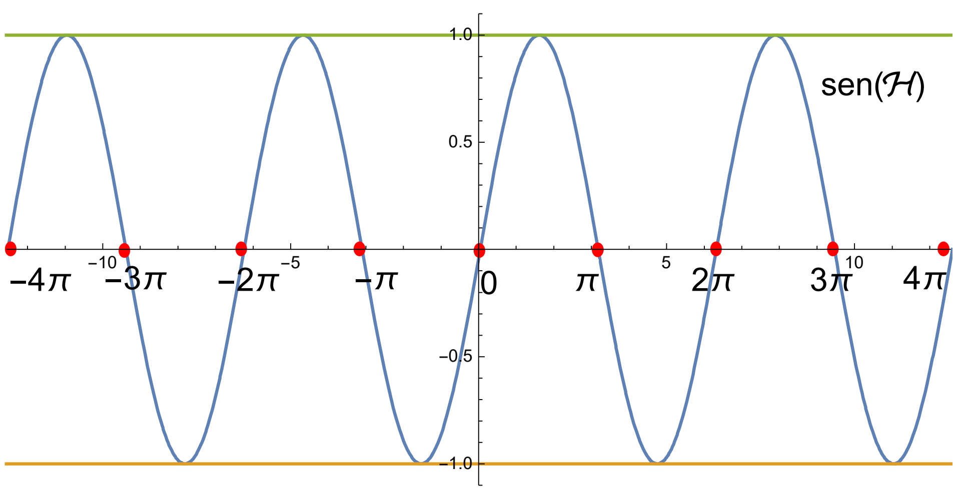
$\Longrightarrow \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Si llamamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ tenemos que resolver la ecuación sen $(\mathcal{H}) = 0$

es decir encontrar los ceros del seno como paso intermedio

Recordando que sen $(\mathcal{H}) = 0$ para $\mathcal{H} = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

```
Plot[{ Sin[ℋ], -1, 1}, {ℋ, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repres⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



reemplazamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ en las soluciones $\mathcal{H} = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ despejamos x

$2x + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi \Longrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \Longrightarrow x = \frac{-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow$ los ceros de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ son :

$x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Veamos cuáles de estas infinitas soluciones están en el intervalo $[0, 2\pi]$ $([0, 720°])$

$[0, 2\pi]$ $([0, 720°])$ $2\pi = \frac{16}{8}\pi$

----

si k = 0 $x = -\frac{\pi}{8} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8}$ no $\in [0, 2\pi]$

si k = 1 $x = -\frac{\pi}{8} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{(-1+4)}{8}\pi = \frac{3}{8}\pi$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 2 $x = -\frac{\pi}{8} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{(-1+8)}{8}\pi = \frac{7}{8}\pi$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 3 $x = -\frac{\pi}{8} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{(-1+12)}{8}\pi = \frac{11}{8}\pi$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 4 $x = -\frac{\pi}{8} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{(-1+16)}{8}\pi = \frac{15}{8}\pi$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 5 $x = -\frac{\pi}{8} + 5 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{2} = \frac{(-1+20)}{8}\pi = \frac{19}{8}\pi$ no $\in [0, 2\pi]$

Ahora con k < 0

si k = -1 $x = -\frac{\pi}{8} + (-1) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = \frac{(-1-4)}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi$ no $\in [0, 2\pi]$

Por lo tanto, el conjunto de ceros de f (x) en $[0, 2\pi]$ es :

$C^0 = \left\{\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right\}$

Cálculo del C^+ y C^-

Como $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **es continua**

utilizaremos el corolario del Teo de Bolzano que afirma que entre dos ceros consecutivos

o bien $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[0, 2\pi]$:

$C^0 = \left\{\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right\}$ **y** $[0, 2\pi]$ **como Dom (f)**

Entonces los intervalos entre raíces, de evaluación de f (x), serán :

$\left[0, \frac{3}{8}\pi\right); \left(\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi\right); \left(\frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi\right); \left(\frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right); \left(\frac{15}{8}\pi, 2\pi\right]$

	$[0, \frac{3\pi}{8})$	$(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8})$	$(\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8})$	$(\frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8})$	$(\frac{15\pi}{8}, 2\pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{31\pi}{16}$
f(x)	2.77164	-3	3	-3	1.14805
f(x) es	+	-	+	-	+

Entonces C^+ y C^- de $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[0, 2\pi]$, son :

$$C^+ = \left[0, \frac{3}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{15}{8}\pi, 2\pi\right]$$

y

$$C^- = \left(\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right)$$

Calculemos los máximos y mínimos de $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[0, 2\pi]$

Máximos de $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[0, 2\pi]$:

$$f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Llamamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ $\Longrightarrow$ buscamos los máximos de $3 \operatorname{sen}(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\operatorname{sen}(\mathcal{H})$ vemos que los máximos se dan para

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H}$, despejamos x :

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \frac{(-1+2)}{4}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi$$

en

$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los máximos de } f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[0, 2\pi]$ $\left(\frac{16}{8}\pi = 2\pi\right)$

si k = 0 $\quad x = \frac{\pi}{8} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{8}$ $\quad$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 1 $\quad x = \frac{\pi}{8} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ $\quad$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 2 $\quad x = \frac{\pi}{8} + 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{17}{8}\pi$ $\quad$ no $\in [0, 2\pi]$

Ahora con k < 0

si k = -1 $\quad x = \frac{\pi}{8} + (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7}{8}\pi$ $\quad$ no $\in [0, 2\pi]$

Por lo tanto, los máximos de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **que pertenecen a** $[0, 2\pi]$ **son :**

$$x_M = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{9}{8}\pi\right\}$$

Mínimos de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **en** $[0, 2\pi]$ **:**

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Llamamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ $\Longrightarrow$ **buscamos los mínimos de** $3\,\text{sen}(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de sen $(\mathcal{H})$ **vemos que los mínimos se dan para**

$$\mathcal{H} = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \quad , z \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H}$**, despejamos x :**

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(-1+6)}{4}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi + z \cdot 2\pi$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{5}{4}\pi + z \cdot 2\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi + z \cdot \pi$$

en :

$$x = \frac{5}{8}\pi + z \cdot \pi \,, \quad z \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los mínimos de } f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[0, 2\pi]$ $\left(\frac{16}{8}\pi = 2\pi\right)$

si z = 0 $\quad x = \frac{5}{8}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{5}{8}\pi$ $\quad$ sí $\in [0, 2\pi]$

si z = 1 $\quad x = \frac{5}{8}\pi + 1\cdot\pi = \frac{5}{8}\pi + \pi = \frac{13}{8}\pi$ $\qquad$ **sí ∈ [0, 2 π]**

si z = 2 $\quad x = \frac{5}{8}\pi + 2\cdot\pi = \frac{5}{8}\pi + 2\pi = \frac{21}{8}\pi$ $\qquad$ **no ∈ [0, 2 π]**

Ahora con z < 0

si z = -1 $\quad x = \frac{5}{8}\pi + (-1)\cdot\pi = \frac{5}{8}\pi - \pi = -\frac{3}{8}\pi$ $\qquad$ **no ∈ [0, 2 π]**

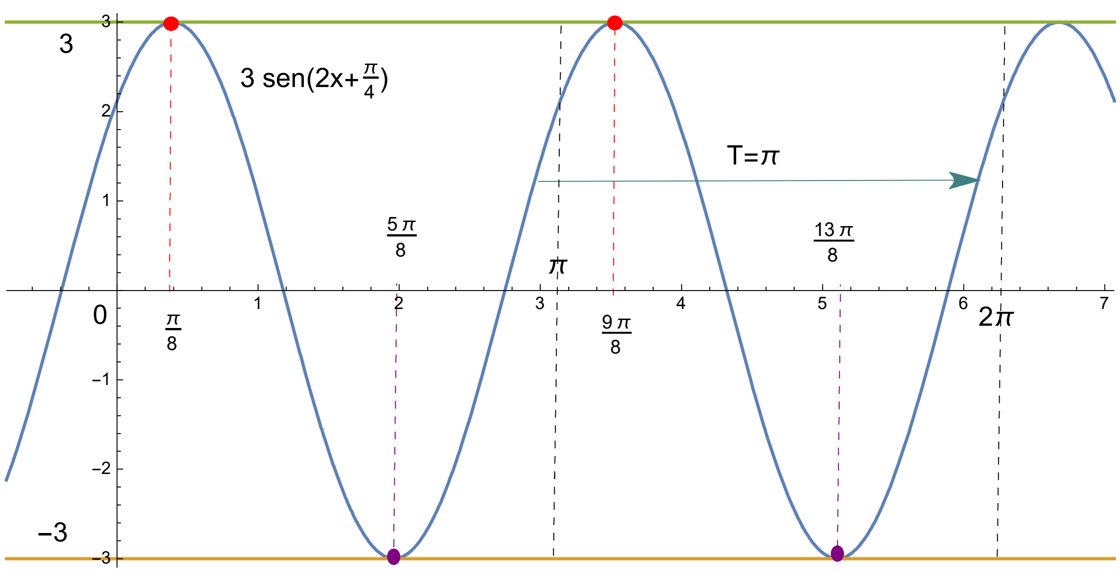
Por lo tanto, los mínimos de f (x) = 3 sen $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **que pertenecen a [0, 2 π] son :**

$$x_m = \left\{\frac{5}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi\right\}$$

Veamos un gráfico de f (x) = 3 sen $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{ 3 Sin[2 x + π/4], -3, 3}, {x, -π/4, 9/4 π},
 PlotRange → {{-π/4, 9/4 π}, {-3.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen··· seno cociente de aspecto



Ej 21 b) Hallar C^0, C^+, C^-, **máximos y mínimos e Imagen de f con gráfico aprox.**

f (x) = 2 cos $(3x - \pi) - 1$ **en [π, 2 π]**

f (x) = 2 cos $(3x - \pi) - 1 = 2\cos\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Nota : respecto a cos (x) f (x) es una

.- compresión según el eje x a 1 tercio lo que hace reducir el período a $T = \frac{2\pi}{3}$

.- una traslación respecto de las "x" en $\frac{\pi}{3}$ para la derecha

.- una dilatación al doble según las y

.- una traslación respecto de las "y" en 1 hacia abajo

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Como A = 2 y |A| es la Amplitud ⟹ Amplitud = 2

y como hay una traslación según el eje de la "y" en 1 hacia abajo será

Imagen (f) = [-3, 1]

----

como b = 3 y b se relaciona con el período T a partir de $|b| = \frac{2\pi}{T}$

tenemos $|3| = 3 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Período de f (x) es $T = \frac{2}{3}\pi$

Calculemos el C^0

$C^0 = \{x \in Dom(f) : f(x) = 0\}$

planteamos f (x) = 0

$f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1 = 0 \implies \cos(3x - \pi) = \frac{1}{2} \implies$

$\implies \cos(3x - \pi) = \frac{1}{2}$

Si llamamos $\mathcal{H} = 3x - \pi$ tenemos que resolver la ecuación $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$

es decir encontrar los ceros del coseno como paso intermedio

Mirando la tabla de valores de seno y coseno para arcos en el 1 er cuadrante

vemos que $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ para $\mathcal{H} = \frac{\pi}{3}$

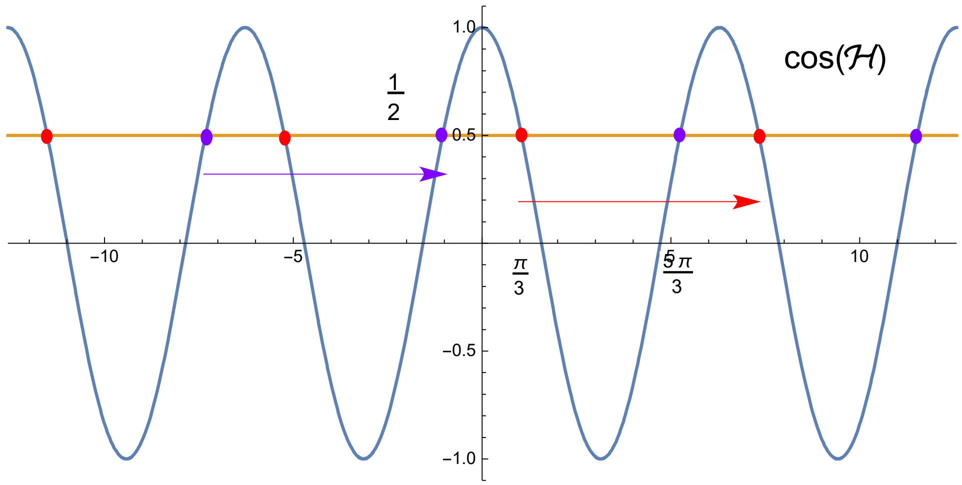
Ahora el coseno es positivo para arcos en el 1 er cuadrante y en el 4 to cuadrante

En el 1 er cuadrante, es como vimos por tabla $\mathcal{H} = \frac{\pi}{3}$

En el 4 to cuadrante será $\mathcal{H} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

las soluciones de $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ son dos conjuntos infinitos :

$S_1 : \mathcal{H} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ó $S_2 : \mathcal{H} = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi$, $z \in \mathbb{Z}$



Para obtener x de f (x) tal que $\cos(3x-\pi) = \frac{1}{2}$

reemplazamos $\mathcal{H} = 3x - \pi$ **para luego despejar x :**

En S_1 **:**

$$3x - \pi = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \implies 3x = \pi + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{(3+1)}{3}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi}{3} = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Entonces $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Veamos el conjunto S_2

En S_2 **:**

$$3x - \pi = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \implies 3x = \pi + \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(3+5)}{3}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{8}{3}\pi + z \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{\frac{8}{3}\pi + z \cdot 2\pi}{3} = \frac{8}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Entonces $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{8}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$

Por lo tanto,

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{8}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Este es el conjunto de ceros de f (x) $= 2\cos(3x-\pi) - 1$ **en todo** $\mathbb{R}$

$$C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{8}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Veamos cuáles de estas infinitas soluciones de ceros están en el intervalo $[\pi, 2\pi]$ $([180°, 360°])$

$[\pi, 2\pi]$ $([180°, 360°])$ $\quad \pi = \frac{9}{9}\pi \quad , \quad 2\pi = \frac{18}{9}\pi$

Para $\tilde{S_1}$ **en** $[\pi, 2\pi]$

$x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

----

si k = 0 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

si k = 1 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{(4+6)}{9}\pi = \frac{10}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

si k = 2 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{(4+12)}{9}\pi = \frac{16}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

si k = 3 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + 3 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi + 2\pi = \frac{(4+18)}{9}\pi = \frac{22}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Ahora con k < 0

si k = -1 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{(4-6)}{9}\pi = -\frac{2}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones $\tilde{S_1}$ **de f (x) en** $[\pi, 2\pi]$ **es :**

$\tilde{S_1} = \left\{\frac{10}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right\}$

Para $\tilde{S_2}$ **en** $[\pi, 2\pi]$ $\quad [\pi, 2\pi]$ $([180°, 360°])$ $\quad \pi = \frac{9}{9}\pi \quad , \quad 2\pi = \frac{18}{9}\pi$

$x = \frac{8}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi$

si z = 0 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

si z = 1 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{(8+6)}{9}\pi = \frac{15}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

si z = 2 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{(8+12)}{9}\pi = \frac{20}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Ahora con z < 0

si z = -1 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{(8-6)}{9}\pi = \frac{2}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones $\tilde{S_2}$ **de f (x) en** $[\pi, 2\pi]$ **es :**

$\tilde{S_2} = \left\{\frac{15}{9}\pi\right\}$

Finalmente el conjunto de ceros de f (x) = 2 cos (3 x - π) - 1 en [π, 2 π] es :

$$C^0 = \left\{\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right\}$$

Cálculo del C^+ y C^-

Como f (x) = 2 cos (3 x - π) - 1 es continua

utilizaremos el corolario del Teo de Bolzano que afirma que entre dos ceros consecutivos

o bien f (x) > 0 o f (x) < 0 en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre [π, 2 π] :

$C^0 = \left\{\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right\}$ **y [π, 2 π] como Dom (f)**

Entonces los intervalos entre raíces, de evaluación de f (x), serán :

$\left[\pi, \frac{10}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{16}{9}\pi, 2\pi\right]$

	$[\pi, \frac{10\pi}{9})$	$(\frac{10\pi}{9}, \frac{15\pi}{9})$	$(\frac{15\pi}{9}, \frac{16\pi}{9})$	$(\frac{16\pi}{9}, 2\pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$\frac{19\pi}{18}$	$\frac{25\pi}{18}$	$\frac{31\pi}{18}$	$\frac{17\pi}{9}$
f(x)	1.73205	-1.73205	1.73205	-1
f(x) es	+	-	+	-

Entonces C^+ y C^- de f (x) = 2 cos (3 x - π) - 1 en [π, 2 π] , son :

$C^+ = \left[\pi, \frac{10}{9}\pi\right) \cup \left(\frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right)$

y

$C^- = \left(\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi\right) \cup \left(\frac{16}{9}\pi, 2\pi\right]$

Calculemos los máximos y mínimos de f (x) = 2 cos (3 x - π) - 1 en [π, 2 π]

Máximos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ en $[\pi, 2\pi]$:

$f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$

Llamamos $\mathcal{H} = 3x - \pi \implies$ buscamos los máximos de $2\cos(\mathcal{H}) - 1$

Como el factor 2 genera una dilatación según las "y" de $\cos(\mathcal{H})$ y el -1 genera una traslación según las "y" los máximos y mínimos de $2\cos(\mathcal{H}) - 1$ se dan para los mismos x que para $\cos(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\cos(\mathcal{H})$ vemos que los máximos se dan para

$$\mathcal{H} = k \cdot 2\pi \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H} = 3x - \pi$, despejamos x :

$$3x - \pi = k \cdot 2\pi \implies 3x = \pi + k \cdot 2\pi \implies x = \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

en

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi \, , \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los máximos de } f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[\pi, 2\pi]$ $\left(\frac{3}{3}\pi = \pi, \; \frac{6}{3}\pi = 2\pi\right)$

si $k = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ no $\in [\pi, 2\pi]$

si $k = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

si $k = 2$ $\quad x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

si $k = 3$ $\quad x = \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Ahora con $k < 0$

si $k = -1$ $\quad x = \frac{\pi}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{3}$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, los máximos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ que pertenecen a $[\pi, 2\pi]$ son :

$$x_M = \left\{\pi, \; \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Mínimos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ en $[\pi, 2\pi]$:

$f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$

Llamamos $\mathcal{H} = 3x - \pi \implies$ buscamos los mínimos de $2\cos(\mathcal{H}) - 1$

Como el factor 2 genera una dilatación según las "y" de $\cos(\mathcal{H})$ y el -1 genera una traslación según las "y" los máximos y mínimos de $2\cos(\mathcal{H}) - 1$ se dan para los mismos x que para $\cos(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\cos(\mathcal{H})$ vemos que los mínimos se dan para

$$\mathcal{H} = \pi + z \cdot 2\pi \quad , \; z \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H} = 3x - \pi$, **despejamos** x :

$$3x - \pi = \pi + z \cdot 2\pi \implies 3x = \pi + \pi + z \cdot 2\pi = 2\pi + z \cdot 2\pi \implies x = \frac{2\pi + z \cdot 2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi$$

en :

$$x = \frac{2}{3}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi, \quad z \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los mínimos de } f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[\pi, 2\pi]$ $\left(\frac{3}{3}\pi = \pi, \frac{6}{3}\pi = 2\pi\right)$

si $z = 0$ $\quad x = \frac{2}{3}\pi + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

si $z = 1$ $\quad x = \frac{2}{3}\pi + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$ $\qquad$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

si $z = 2$ $\quad x = \frac{2}{3}\pi + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{6}{3}\pi = 2\pi$ $\qquad$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

Ahora con $z < 0$

si $z = -1$ $\quad x = \frac{2}{3}\pi + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = 0$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, los mínimos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ **que pertenecen a** $[\pi, 2\pi]$ **son :**

$$x_m = \left\{\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}$$

$C^0 = \left\{\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right\}$

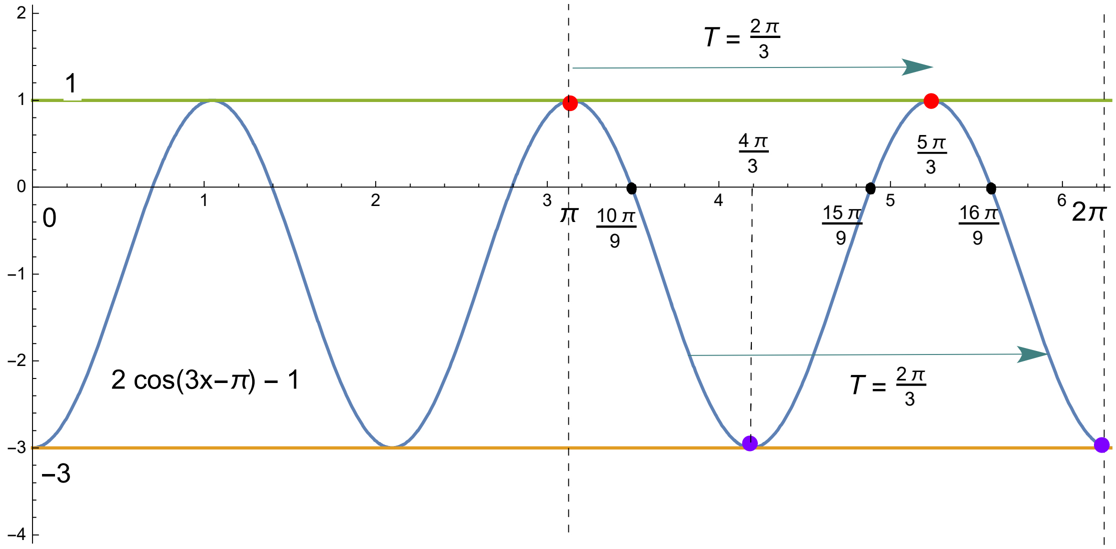
$x_M = \left\{\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$

$x_m = \left\{\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}$

$T = \frac{2}{3}\pi$

Veamos un gráfico de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$

```
Plot[{2 Cos[3 x - π] - 1, -3, 1}, {x, 0, 2 π}, PlotRange → {{0, 2 π}, {-4.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen·· coseno rango de representación cociente de aspecto



Resolver Ejercicios Surtidos Práctica 4 : 2, 3, 5, 8 y 9

Ejercicios Surtidos Práctica 4

+-

Ejercicio 2.- Sean $f(x)=4+\ln(x)$, $g(x)=5x+2$, $h=f\circ g$ y h^{-1} la función inversa de h. Calcular h^{-1} y dar el dominio y la imagen de h^{-1}.

Ej 2 Surtidos Pract 4

$f(x) = 4 + \ln(x)$ $g(x) = 5x + 2$ $h = f_\circ g$ y h^{-1} la función inversa de h

Calcular : h^{-1} , Dom $\left(h^{-1}\right)$ e Imagen $\left(h^{-1}\right)$

Veamos quién es h (x)

$f_\circ g)\ x) = f(g(x)) = f\left(5x+2\right) = \ln\left(5x+2\right)$

$h(x) = \ln\left(5x+2\right)$

----

veamos cuál es el Dom (h) :

como el logaritmo está definido para cuando su argumento es positivo, deberá ser :

$$5x+2>0 \implies 5x>-2 \implies x>-\frac{2}{5}$$

$$\text{Dom}(h) = \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

Calculemos la inversa de h :

planteamos $y = \ln\left(5x+2\right)$ y despejamos x como función de y

$y = \ln\left(5x+2\right) \implies$ aplicando la función exponencial a ambos miembros :

$e^y = e^{\ln(5x+2)} \implies e^y = 5x+2 \implies 5x = e^y - 2 \implies x = \dfrac{e^y - 2}{5}$

$\implies x = \dfrac{e^y - 2}{5}$ intercambiamos $x \leftrightarrow y \implies y = \dfrac{e^x - 2}{5}$

Entonces h^{-1} es :

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x - 2}{5}$$

$\mathrm{Dom}\left(h^{-1}\right) = \mathbb{R}$ (porque la función exponencial está definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$)

$\mathrm{Imagen}\left(h^{-1}\right) = \mathrm{Dom}(h) = \left(-\dfrac{2}{5},\ +\infty\right)$

+-

Ejercicio 3.- Sean $f(x) = 3 - e^{4+2x}$ y f^{-1} la función inversa de f. Hallar $f^{-1}(x)$ y dar su dominio.

Ej 3 Surtidos Pract 4

$f(x) = 3 - e^{4+2x}$ Hallar f^{-1} y $\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right)$

Vemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ (porque la función exponencial está definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$)

Para calcular f^{-1} planteamos $y = 3 - e^{4+2x}$ y despejamos x como función de y

$y = 3 - e^{4+2x} \implies e^{4+2x} = 3 - y \implies$ aplicando ln a ambos miembros

$\ln\left(e^{4+2x}\right) = \ln(3-y) \implies 4 + 2x = \ln(3-y) \implies 2x = \ln(3-y) - 4 \implies$

$\implies x = \dfrac{\ln(3-y) - 4}{2}$ ahora intercambiamos $x \leftrightarrow y$

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(3-x) - 4}{2}$$

Calculemos el $\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right)$:

como el logaritmo está definido para cuando su argumento es > 0, deberá ser

$3 - x > 0 \implies 3 > x$ es decir $x < 3$

$\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = (-\infty, 3)$

$\mathrm{Imagen}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

+-

Ejercicio 5.- Sea $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(2x) + 2$. Determinar la imagen de f y hallar los $x \in [-\pi;\pi]$ para los cuales f alcanza el valor máximo.

Ej 5 Surtidos Pract 4

Sea $f(x) = 5 \operatorname{sen}(2x) + 2$

Hallar Imagen (f) y dar los $x \in [-\pi, \pi]$ para los cuales f alcanza el valor máximo

Como A = 5 y |A| es la Amplitud tenemos que Amplitud = |5| = 5

Pero como f tiene una traslación respecto al eje de las "y" en 2 unidades hacia arriba el conjunto Imagen será :

Imagen (f) = [-5 + 2, 5 + 2] = [-3, 7]

Busquemos ahora los máximos de f (x) es decir los x tal que f sea 7 en $[-\pi, \pi]$

Como b = 2 y b se relaciona con el período T de f (x) mediante la expresión :

$$|b| = \frac{2\pi}{T} \implies |2| = 2 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

El período de f (x) es $T = \pi$

Los lugares en donde f alcanza los máximos se verán comprimidos a la mitad respecto a los x del sen (x), debido al factor b

Además como $f(x) = 5 \operatorname{sen}(2x) + 2$ los máximos de f (x) estarán en los mismos x que los máximos de $\operatorname{sen}(2x)$

LLamemos $\mathcal{H} = 2x$ entonces buscamos los máximos de sen $(\mathcal{H})$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Nota : cuando decimos máximos se refiere a los x
cuando decimos el Valor máximo que alcanza f nos referimos a las y

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

los máximos de sen $(\mathcal{H})$ están en :

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H} = 2x$ despejamos los x de f (x) para los que alcanza el valor máximo :

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \implies x = \frac{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Veamos cuáles de esos x están en $[-\pi, \pi]$

$k > 0$

$$\text{si } k = 0 \implies x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} \qquad \text{sí } \in [-\pi, \pi]$$

$$\text{si } k = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi \qquad \text{no } \in [-\pi, \pi]$$

----

k < 0

si k = -1 $\Longrightarrow$ $\mathbf{x} = \frac{\pi}{4} + (-1)\cdot\pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$ **sí $\in [-\pi, \pi]$**

si k = -2 $\Longrightarrow$ $\mathbf{x} = \frac{\pi}{4} + (-2)\cdot\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ **no $\in [-\pi, \pi]$**

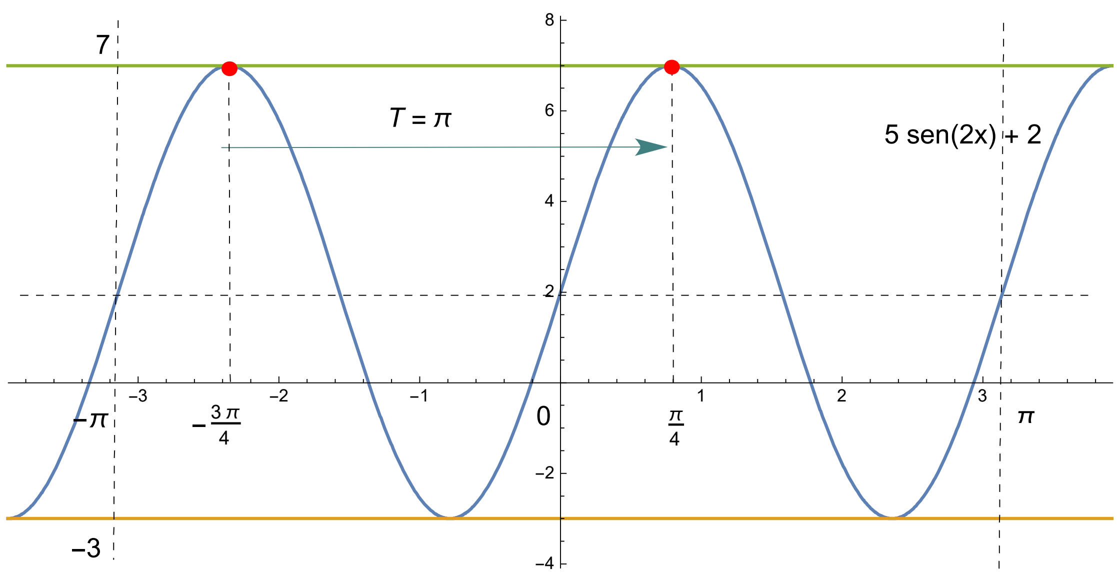
Por lo tanto, los máximos de f (x) = 5 sen (2 x) + 2 en $[-\pi, \pi]$ son :

$$\mathbf{x_M} = \left\{-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{\pi}{4}\right\}$$

Veamos un gráfico de f (x) = 5 sen (2 x) + 2

```
Plot[{5 Sin[2 x] + 2, -3, 7}, {x, -5/4 π, 5/4 π},
 PlotRange → {{-5/4 π, 5/4 π}, {-4.1, 8.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen··· seno
rango de representación
cociente de aspecto



+-+

Ejercicio 8.- Sea $f(x) = 2\,\text{sen}(2x + \frac{\pi}{4})$. Hallar los ceros y los valores máximo y mínimo de f.

Ej 8 Surtidos Pract 4

f (x) = 2 sen $\left(2\,x + \frac{\pi}{4}\right)$ Encontrar C^0 y los valores máximo y mínimo de f

Como A = 2 y |A| es la Amplitud, entonces Amplitud = |2| = 2

y como f (x) no tiene traslación según el eje de las "y" el conjunto Imagen es :

Imagen (f) = [-2, 2]

Luego, los valores máximo y mínimo de f son :

Valor Máximo = 2

Valor Mínimo = - 2

Calculemos C^0 **de** $f(x) = 2\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

planteamos $f(x) = 0$

$2\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{0}{2} = 0$

llamemos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ **entonces** $\text{sen}(\mathcal{H}) = 0$

Los ceros de sen $(\mathcal{H})$ **están en :**

$\mathcal{H} = k \cdot \pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

Reemplazando $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ **para despejar x :**

$2x + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\left(-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\right)}{2} = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

Entonces en :

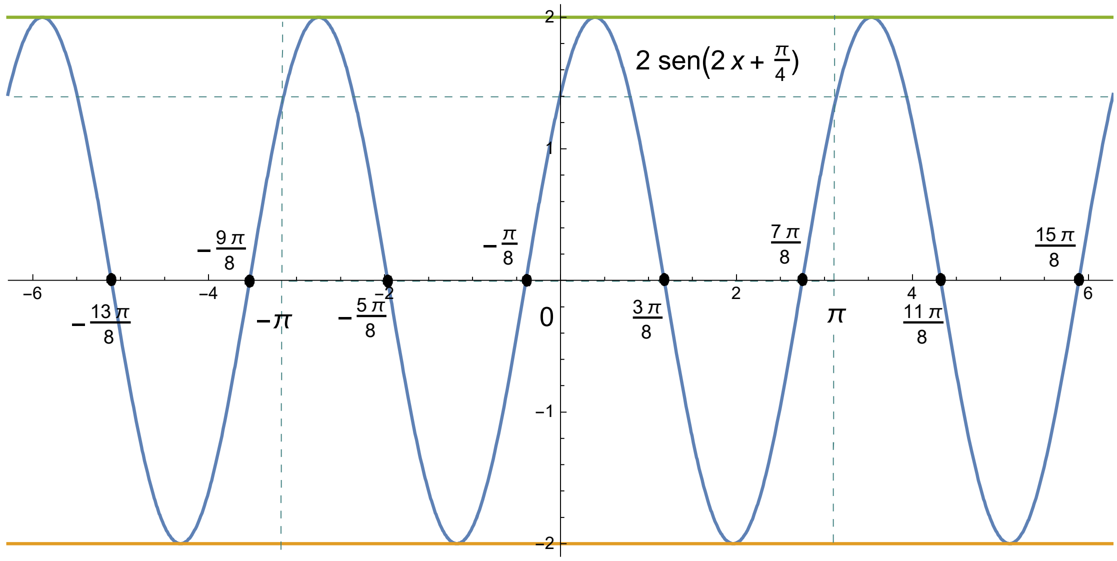
$x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \;,\; k \in \mathbb{Z}$

están los ceros de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \;,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Veamos el gráfico de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{2 Sin[2 x + π/4], -2, 2}, {x, -2 π, 2 π},
represen··  seno
  PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
  rango de representación                 cociente de aspecto
```



+-+

Ejercicio 9.- Sea $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2\cos(x+\frac{\pi}{2})$. Encontrar todos los puntos en que el gráfico de f corta a la recta de ecuación $y=-1$.

Ej 9 Surtidos Pract 4

$f(x) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad f:[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$

Encontremos todos los puntos en que el gráfico de f corta a la recta de ecuación $y = -1$

Para ello planteamos :

$$f(x) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad\Longrightarrow\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Si llamamos $\mathcal{H} = x+\frac{\pi}{2}$ resolveremos $\cos(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$ para luego reemplazar para despejar x

Entonces $\cos(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$

se da para arcos en el 2 do y 3 er cuadrante y el arco en el 1 er cuadrante que tiene

$\cos(\hat{t}) = \frac{1}{2}$ es $\hat{t} = \frac{\pi}{3}$

Entonces :

el arco del 2 do cuadrante es $\pi-\hat{t} = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

el arco del 3 er cuadrante es $\pi+\hat{t} = \pi+\frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

Tenemos dos conjuntos de soluciones para $\cos(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$

$S_1 \quad \mathcal{H} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad$ ó $\quad S_2 \quad \mathcal{H} = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

Reemplazando $\mathcal{H} = x + \frac{\pi}{2}$ **despejamos** x **:**

para S_1

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{(-3+4)}{6}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$S_1 : \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

para S_2

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(-3+8)}{6}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi$$

$S_2 : \quad x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

$$S_1 \bigcup S_2 = \left\{x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Como Dom (f) = [0, π]

veamos cuáles de las soluciones están en [0, π]

para las S_1

$\text{si } k = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ — sí $\in [0, \pi]$

$\text{si } k = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ — no $\in [0, \pi]$

$\text{si } k = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$ — no $\in [0, \pi]$

----

para las S_2

$\text{si } z = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi$ — sí $\in [0, \pi]$

$\text{si } z = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$ — no $\in [0, \pi]$

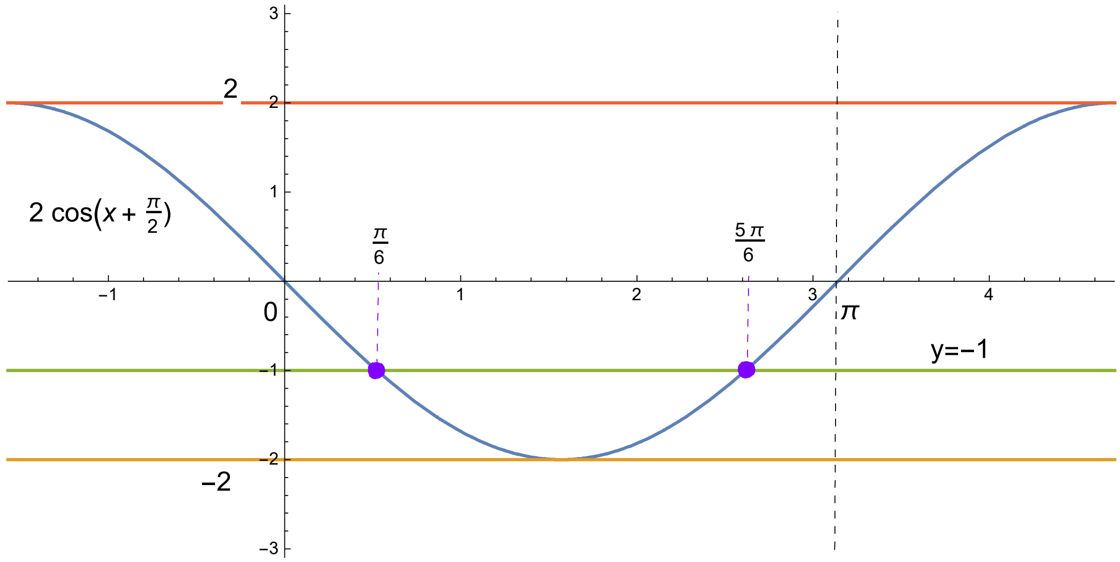
$\text{si } z = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$ — no $\in [0, \pi]$

El conjunto de x en donde el gráfico de f se corta con y = -1 en [0, π] es :

$$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right\}$$

Veamos el gráfico de $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

```
Plot[{2 Cos[x + π/2], -2, -1, 2}, {x, -π/2, 3/2 π},
 PlotRange → {{-π/2, 3/2 π}, {-3.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```



+++